Konkurz 1804: Bolzano a matematika v Českých zemích konce 18. století[1]

Jan Makovský

Competition 1804: Bolzano and mathematics in the Czech lands at the end of the 18th century. In 1804 the chair for elementary mathematics at Charles-Ferdinand University became vacant as a result of the retirement of Stanislav Vydra. The examination, in which only Bernard Bolzano and Ladislav Jandera took part, consisted of a written and an oral part. The chair went to Jandera, while Bolzano became professor of "religious doctrine". This paper examines the context, the answers of both candidates and the outcome of the competition, based on a number of related papers preserved in the Czech National Archives in Prague. Additionally, we present the Czech translation of Bolzano's written answer which is published here for the first time.

Keywords: History of eighteenth century mathematics • History of nineteenth century mathematics • Bolzano • Jandera • mathematical examination • Prague university

1. Osamělý myslitel

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848) bývá právem řazen mezi nejdůležitější a nejobjevnější matematiky všech dob. Panuje údiv nad důsledností a hloubkou jeho myslitelských výkonů, ať na poli matematické logiky, funkcionální analýzy, teorie nekonečna či skladby kontinua;[2] a stejně tak i jistá obecně

[1] Studie je výsledkem společné badatelské činnosti kolegia Crippa, Fuentés-Guillén, Makovský, podporovaného Grantovou agenturou České republiky v rámci projektu GJ-19-03125Y: „Matematika v Českých zemích: od jezuitského učení po Bernarda Bolzana". V budoucnosti vyjde rovněž její obsáhlejší verze v anglickém jazyce doplněná o přepis německého rukopisu, jejž vypracovali Davide Crippa a Jan Makovský..

[2] Povahu milníku, který dějiny matematiky takřka dělí vedví, má zejména Bolzanova syntaktická teorie aktuálního nekonečna a s ním spojené extenzionální pojetí kontinua coby *skladby* bodů (viz zejm. B. BOLZANO. *Paradoxy nekonečna*, § 38, s. 69–72; úplné údaje o citovaných pracích viz v Seznamu použité literatury na konci článku), které vedlo k prvnímu *ryze analytickému důkazu* věty o mezihodnotě (viz s. 3) a radikálnímu obratu v myšlení spojitosti vůbec. K dopadům prvého ohledu viz P. VOPĚNKA. *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*, s. 159–224; k předpokladům druhého viz J. MAKOVSKÝ. *Entre la nature et l'analyse: essai sur l'histoire de la loi de continuité au XVIII*[e] *siècle*, s. 105–127.

sdílená lítost nad tím, že se jeho znamenitým myšlenkám nedostalo řádného přijetí. Obojí vrcholnou měrou vystihuje závěrečné zvolání Františka Studničky z úvodu k jeho překladu *Rein analytischer Beweis*:

> Mámeť na zřeteli především bystrého mathematika v Čechách zrozeného, u něhož jen dlužno litovati, že mu nebyla usouzena stolice mathematiky na tehdejším ústavu filosofickém, kteráž byla současně se stolicí náboženství uprázdněna. Jak by se bylo studium této vědy, jiož tu zastupoval tolik let přísný Jandera, u nás prohloubilo a rozšířilo, kdyby ji současně též vykládal nadšený *Bolzano*![3]

Uvedené místo do jisté míry vymezuje i předmět a východisko naší práce. Jistě platí, že jakkoli veliká, Bolzanova matematická tvorba zůstávala dlouho ve stínu jeho veřejného působení; a snad právě i díky vnějším protivenstvím mohla své velikosti dosáhnout.[4] Toto působení pak zase zpětně určovalo jak její budoucí přijetí, tak i cenu a vposled i onu velikost, jiož mohla představovat v očích samotného Bolzana.[5] Práce uveřejněné proto zapadly, zatímco ostatní – a těch byla naprostá většina – pro něj ztratilo smysl, anebo mu bylo přímo znemožněno, vydávat. K Bolzanovu mimořádnému údělu se proto váže obraz „osamělého myslitele“,[6] jenž ve své osudové izolaci předbíhá dobu a jakoby z čistého myšlení a pro myšlení samé sám vytváří či alespoň předjímá nejlepší z toho, co nabídne rigorózní matematická analýza či teorie množin následujícího století.[7]

---

3 B. BOLZANO. *Ryze analytický důkaz*, s. 1a. Překlad vyšel „k oslavě stoletých narozenin Bolzanových“ roku 1881. Studničkovo přání ze závěrečné poznámky k překladu: „Kéž by aspoň jubilejní slavnost tato přispěla k tomu, aby četné práce Bolzanovy, jež v oboru mathematiky provedl a částečně uveřejnil, dosáhly ocenění, jakéhož vším právem zasluhují a v nejnovější době od prof. *O. Stolze* v Innšpruku došly!“ (tamtéž, s. 38) svědčí jasně, že tou dobou, kdy se v analýze již prosazovaly příbuzné Cauchyho pojmy, se neblahá situace sotva začala obracet.

4 B. BOLZANO. *Vlastní životopis*, s. 100; srov. M. HYKŠOVÁ. Bolzano's Inheritance Research in Bohemia, s. 67.

5 Srov. J. FOLTA. Život a vědecké snahy Bernarda Bolzana, s. 11.

6 „Hledal osaměle pravdu svým vlastním důkladným způsobem a nenechal se strhnout na pohodlnější, obecně přijatelnější, vyšlapanější cestu. Jeho neotřelé, svérázné, někdy až revoluční teorie by bývaly mohly urychlit vývoj evropské vzdělanosti anebo dokonce pozměnit jeho směr,“ za všechny shrnuje K. Trlifajová v předmluvě k práci K. TRLIFAJOVÁ (ed.). *Osamělý myslitel Bernard Bolzano*, s. 9.

7 Viz např. P. RUSNOCK. *Bolzano's Philosophy and the Emergence of Modern Mathematics*, s. 84–87.

Přesto pohled do Bolzanových děl skýtá i jiný vůdčí rys, než je ona přísná logická jednota v *duchu geometrickém* – ona, Bolzanovými slovy, „vnitřní souvislost",[8] spekulativní, zakladatelská a reformační, idealizovaná obrazem „osamělého myslitele". Vyhlášena byla již v předmluvě k matematické prvotině z roku 1804:

> Především jsem si stanovil pravidlo, že mě žádná zřejmost (*Evidenz*) předpokladu nepřiměje k tomu, abych se cítil zproštěn povinnosti hledat pro něj důkazy tak dlouho, dokud jasně neuvidím, že nelze a proč nelze požadovat žádný důkaz.[9]

Oním druhým rysem je jednota v jistém smyslu odvozená, již bychom mohli nazývat jednotou *diachronní* nebo *genealogickou*. Bolzanovy matematické práce nejenže samy zpravidla začínají učeným výkladem klíčových kroků předchůdců v řešení dané otázky, ale povětšinou též samy koření v otázkách, které Bolzano řešil právě ve svých raných pracích.[10]

Oba zmíněné rysy se zračí v jistém společném počátku, totiž události Bolzanova seznámení s matematikou. K tomu ovšem dochází prostřednictvím oficiální učebnice užívané tou dobou na pražské univerzitě, *Die mathematischen Anfangsgründe,*[11] z pera göttingenského profesora matematiky Abrahama Gotthelfa Kästnera (1719–1800). Bolzanovi, jak sám líčí s odstupem tří desetiletí, učarovala:

> Kästner tam totiž dokazoval to, co se jinak zcela opomíjí, protože to přece každý již ví, to znamená: snažil se objasnit čtenáři důvod, na němž spočívá jeden z jeho soudů; a to mi bylo právě nejmilejší. Moje obzvláštní záliba v matematice byla založena

[8] B. BOLZANO. *Vlastní životopis*, s. 32.

[9] B. BOLZANO. *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie. Einleitende Vorrede*, nestránkováno; český překlad in J. FOLTA. *Život a vědecké snahy Bernarda Bolzana*, s. 19. Více viz S. RUSS. *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*, s. 13–23.

[10] J. FOLTA. Život a vědecké snahy Bernarda Bolzana, s. 19.

[11] Obsáhlý soubor o čtyřech svazcích (věnovaných po řadě aritmetice, geometrii, trigonometrii a perspektivě; užité matematice; analýze konečných a nekonečných veličin; vyšší mechanice a hydrodynamice) sloužil k výuce matematických věd na německých univerzitách; v Praze pak, jak ještě zmíníme, od roku 1776. Učebnice vycházela v četných edicích mezi lety 1758 a 1800 v Göttingen, roku 1783 pak v mírně odlišné podobě ve Vídni. Zjistit, zdali se právě toto vydání studovalo v Praze, se nepodařilo. Katalog matematických knih IX A19 Národní knihovny, založený roku 1781, naproti tomu obsahuje záznam čtvrté edice *Anfangsgründe* z Göttingen 1786, která tak bude v dalším citována. Dík za cenné připomínky v tomto bodě patří G. Schuppenerovi.

> tedy vlastně jen na její čistě spekulativní části, neboli cenil jsem si na ní jen toho, co je současně filosofií.[12]

První pravidlo původní Bolzanovy matematické tvorby tedy spadá vjedno s jejím původním dějinným podnětem. Oba zmíněné rysy, spekulativní a genealogický, jsou tudíž vzájemně se proplétajícími hledisky jedné a téže skutečnosti a oba přirozeně zasluhují svůj díl pozornosti.

2. Společné počátky

Zatímco, jak již bylo řečeno, zájem o Bolzanovy (nepochybně úctyhodné) myslitelské výkony a jejich „vnitřní souvislosti" roste ustavičně tím více, jak jsou objevovány a poznávány, do značné míry v druhořadém postavení zůstávají právě genealogické kořeny Bolzanovy tvorby: matematika, její pojetí, výuka, úloha ve vzdělanosti, jakož i proměny toho všeho na území rakouského mocnářství přelomu století. Příčiny byly naznačeny výše. K načrtnuté podobizně osamělého, pozapomenutého génia tu navíc mlčky přistupuje mlhavé přesvědčení, že Bolzanovi předchůdci a současníci v Českých zemích co do originality nestojí ani za řeč.

Jistě však také platí, a předvést to jsme se pokusili shora, že zkoumání kořenů a dobových souvislostí matematického myšlení[13] u Bolzana, zejména pak v jeho raném období, vrhá světlo na více otázek zároveň – ať už se týkají jeho vlastní matematické tvorby nebo jeho dějinného obrazu. Odkrytí výše zmíněných souvislostí raného Bolzanova matematického myšlení nám proto přináší trojí užitek: předně umožní poněkud vyjasnit matematickou krajinu tehdejší rakousko-uherské monarchie, a tím také prověřit představu o její neplodnosti; dále přispěje k zpětnému postižení oné vnitřní „dynamické jednoty" Bolzanových matematických teorií (má tedy význam principiální); a konečně umožní porozumět jeho originalitě způsobem, jenž bude co možná vzdálen všem druhům anachronismu.

Mezi zvláště cenné doklady[14] okolností raného Bolzanova matematického myšlení patří jeho zkouška u konkurzu na stolici elementární matematiky Karlo-Ferdinandovy

---

12 B. BOLZANO. *Vlastní životopis*, s. 28.

13 Obdobně pojaté práce z poslední doby docela přesvědčivě prokazují, jak zásadně může rozbor místních tradic, způsobů a norem matematického vzdělání přispět – a to i v případě zcela mimořádných matematiků – k vysvětlení volby jejich osobitého matematického výrazu a metody; viz např. C. ERHARDT. Évariste Galois, un candidat à l'École préparatoire en 1829, s. 289–328.

14 K této zkoušce se v Národním archivu ČR dochovaly rukopisy písemných odpovědí obou kandidátů, protokoly z průběhu zkoušky, hodnocení i úřední zprávy Gubernia

univerzity z října roku 1804. O místo, uvolněné po nemocném Stanislavu Vydrovi, se Bolzano ucházel spolu s Josefem Ladislavem Janderou (1776–1857), spolužákem z Vydrova kurzu, toho času Vydrovým suplentem a pozdějším rektorem. Toto místo Bolzano *nezískal*; načež na filosofické fakultě nastoupil coby učitel nově zřízené „náboženské nauky“ (*Religionslehre*).

V následujícím proto nejprve představíme význam, pojetí a způsob výuky (elementární) matematiky na pražské univerzitě; posléze uvedeme a rozebereme odpovědi obou kandidátů; na základě dochovaných zpráv ukážeme, jakým způsobem byly odpovědi vyhodnoceny, a konečně se pokusíme předložit důvody vedoucí k upřednostnění Jandery – s veškerými dopady, které toto rozhodnutí mělo mít na budoucí, nejen českou vzdělanost.

3. Matematika na pražské univerzitě

Bolzano se narodil 5. října 1781 v době dalekosáhlých josefínských reforem vzdělávání; v letech 1791–1796, za vlády Františka II., časů revoluce, války a společenského neklidu, navštěvoval piaristické gymnázium na pražském Novém Městě, aby pak nastoupil ke studiím na Filosofické fakultě pražské Karlo-Ferdinandovy univerzity a roku 1800 zde pokračoval v doktorátu na fakultě teologické, kde roku 1804 absolvoval.

Josefínskými reformami vrcholí hluboká proměna veškerého zřízení rakouského mocnářství, v níž postupně – nesena duchem osvícenství, racionalismu, centralismu a vposled fundamentálního utilitarismu a společné německé kultury[15] – vzdělanost přechází z rukou církve pod kontrolu státního byrokratického aparátu řízeného z Vídně.[16] Základním cílem počínání je tu přirozeně udržet krok s dobou – především pak se průmyslovým rozvojem a vojenskou mocí vyrovnat předním evropským zemím, jakými byly Prusko, Francie nebo Anglie. „Planá spekulace“ aristotelské tradice nemá již z rozkazu samotné císařovny Marie Terezie ve vzdělávání „žádné místo a je zcela zapovězena“;[17] těžiště nauky o přírodě se přesouvá k matematice, mechanice,

a jeho korespondence s Dvorskou radou. Uloženy jsou v *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755. Český překlad Bolzanovy psané odpovědi je připojen v dodatku k této studii.

15 Srov. H. LeCAINE AGNEW. *Češi a země Koruny české*, s. 138–151.

16 Třebaže „za aktivní spoluúčasti duchovenstva a některých náboženských řádů, například piaristů“ (H. HOLBORN. *A History of Modern Germany: 1648–1840, I*, s. 224).

17 „[…] *unnützen Speculationen hier keinen Platz finden, und gäntzlich verbothen seyn*“, citováno in J. HAUBELT. Filosofické koncessy Josefa Steplinga, s. 211. *Concessus philosophici* byla skupina především jezuitských (ale též světských) učenců kolem Josefa

hydrodynamice a dalším užitým vědám. Jazykem výuky se co možná na všech stupních školské soustavy stává němčina.[18] Účelem vzdělávání není nazírání pravdy, nýbrž výchova občana a *služba státu*. Ve výnosu Josefa II. z 25. listopadu 1782 pak přímo stojí:

> Mladí lidé se nesmí učit ničemu, co by následně shledávali podivným (*seltsam*) anebo co by nepotřebovali či nedokázali zužitkovat k nejlepšímu prospěchu státu, neboť zásadní univerzitní studia slouží toliko k výchově státních úředníků a nemají být určena vzdělávání učenců (*Gelehrter*), kteří, jakmile snad proniknou k základním principům, musejí se dále vzdělávat sami, a nevěřím tomu, že je tu byť jen jediný příklad někoho, kdo by rovnou od katedry odešel učeným […][19]

Josefínským ideálem univerzity – a její přestavby po vzoru univerzit v Halle či Göttingen[20] – bylo tedy vytvářet dobré, tj. poslušné, úředníky, odborníky a služebníky státní moci politické, hospodářské a vojenské. Za účelem modernizace země se za vlád Josefa II. a Františka II. navyšuje počet výukových hodin matematiky; roku 1874 se zřizuje společná výuka tehdejší Stavovské inženýrské školy a Filosofické fakulty a roku 1787 je stavovská inženýrská profesura přeměněna v řádnou profesuru Filosofické fakulty Karlo-Ferdinandovy univerzity.[21] Místo profesora obsazuje Franz Anton Leonard Herget (1741–1800); obsazována jsou učitelská místa přírodopisu, zeměpisu, vyšší matematiky a astronomie.[22] Přesto až na reformu z roku 1784, jíž se stávající dvouletá studia filosofie[23] prodlužují na roky tři, zůstává, všem změnám navzdory, tradiční vysokoškolské kurikulum zachováno: povinná studia filosofické fakulty (během nichž a toliko během nich se vyučuje matematice) slouží jako společný základ pro všechny studenty před volbou jedné z dalších fakult: lékařské, právnické nebo bohoslovecké.

Steplinga (1716–1778), kteří se v průběhu padesátých let pravidelně scházeli za účelem diskuse rozmanitých otázek přírodních věd a reformy univerzitního vzdělávání.

18 Srov. J. MIKULČÁK. *Nástin dějin vyučování a (také školy) v českých zemích*, s. 82–84.

19 Citováno in P. STACHEL. Das österreichische Bildungssystem zwischen 1749 und 1918, s. 1–2.

20 M. OTAVOVÁ. Výuka matematiky na pražské univerzitě v 1. polovině 19. století, s. 147.

21 I. KRAUS. František Josef Gerstner, s. 26.

22 W. TOMEK. *Geschichte der Prager Universität*, s. 337.

23 Srov. *Verzeichniß*, 1785, s. [4–6].

3.1 Matematické kurikulum

Úloha matematiky v letech 1794–1800, kdy se jí v rámci filosofických studií učili Bolzano a Jandera, byla tedy stále především propedeutická. Výuka sestávala ze tří stolic: elementární (čisté a užité) matematiky zastávané Stanislavem Vydrou; praktické matematiky držené Hergetem; a stolice vyšší matematiky, kterou vyučoval Franz Joseph Gerstner (1756–1832).[24]

První ročník byl přirozeně věnován elementární matematice v podání Stanislava Vydry, a to elementární čisté matematice v počtu pěti hodin týdně z celkových jednadvaceti. Pět hodin týdně z celkových dvaceti tří nebo čtyř pak připadalo elementární matematice aplikované, která následovala v ročníku druhém.[25] V obou kurzech se používalo zejména již zmiňovaného Kästnerova pojednání *Mathematischen Anfangsgründe*;[26] kromě toho Vydra k přednáškám z některých oborů aplikované matematiky pravděpodobně užíval i své vlastní práce *Sätze aus der Mechanik*.[27] Třetí ročník konečně zaujímaly Hergetovy přednášky „praktické matematiky" (dvě hodiny týdně z dvaceti pěti), přednášené „*nach eigene Aufsätzen*", dle vlastních podkladů vyučujícího.[28] Náplň kurzu představovaly rozmanité dovednosti od zeměměřičství přes účetnictví až po hydraulické inženýrství.[29] Nabízen byl nadto volitelný kurz praktické matematiky, probíhající během celých tří let a určený pro studenty, kteří zamýšleli pokračovat ve studiích na nějaké zvláštní technické škole, jako byla třeba akademie v Banské Štiavnici.[30]

V obdobném smyslu volitelný pak byl i poslední zmíněný kurz, Gerstnerova přednáška vyšší matematiky, jež se odehrávala jednu hodinu týdně po dobu celých tří let. Navštěvovali ji pravděpodobně budoucí učitelé matematiky a fyziky na gymnáziích a vysokých školách; pro vysokou obtížnost ji bylo s to absolvovat jen několik málo studentů ročně.[31] Skladba kurzu byla následující:

---

24 V průběhu let 1796–1800 vyučoval Gerstner rovněž zvláštní kurz hydrodynamiky, a to na základě Langsdorfova německého překladu příslušného Bossutova pojednání (*Verzeichniß*, 1795 & 1800, s. [9]), tj. *Traité théorique et expérimentale d'hydrodynamique* (1786).

25 *Verzeichniß*, 1795 & 1800, s. [6–7].

26 Viz pozn. 11.

27 *Sätze aus der Mechanik, die den Herren Hörern der angewandten Mathematik*, vyšlo v Praze 1795.

28 Bolzanovy poznámky z kurzů praktické matematiky se dochovaly v C II 15, Památník národního písemnictví (23 listů).

29 J. STAPF. *Unterthänigste Vorstellungen an das Land Tyrol*, s. 8–11.

30 Viz tamtéž, s. 12.

31 Uvádí se asi 4–6, viz J. ŠEDIVÝ. *Antologie matematických didaktických textů. Období 1360–1860*, s. 189–191.

První ročník: Úvod do analýzy konečných a nekonečných veličin, diferenciální a integrální počet podle Eulera
Druhý ročník: Vyšší mechanika a hydraulika včetně aplikací v inženýrství podle Karstena[32] a [Gerstnerových] vlastních prací
Třetí ročník: Optika a teoretická astronomie spolu s aplikacemi v gnomonice, chronologii, zeměpisu a mořeplavectví podle de la Lande.[33]

V rámci svých studií Bolzano kurz vyšší matematiky nenavštěvoval; využil však dodatečného, čtvrtého roku 1799/1800, kdy zároveň navštěvoval přednášku pro první a druhý ročník.[34] Třetí ročník vyšší matematiky, jak plyne z Gerstnerovy zprávy z konkurzu,[35] navštěvoval již v průběhu prvního roku studia teologie. Jandera na přednášku docházel jen v jediném roce 1799.[36]

Zpráva o stavu, skladbě a výuce matematiky na pražské univerzitě konce 18. století zahrnuje množství předmětů, které bychom dnes patrně řadili k docela odlišným naukám; a právě tak i rozlišení mezi čistou, teoretickou matematikou a matematikou užitou či aplikovanou bychom v současnosti jistě chápali jinak. Rozmanitost vyučovaných oborů svědčí nejen o hloubce proměn, jimiž procházely evropské společnosti, ale právě tak poukazuje i na kontinuitu mezi tradiční jezuitskou vzdělaností a vědou a nově vznikajícím světským ideálem univerzity.[37] V dalším průběhu

---

32 Wenceslaus Johann Gustav Karsten (1732–1787). Řeč je s největší pravděpodobností o *Lehrbegriff der gesamten Mathematik* (1767), jehož čtvrtá část je věnována právě hydraulice a hydrodynamice. Gerstner sám tuto práci zmiňuje ve svém *Vergleichung der Kraft und Last beim Räderwerk* (1791); dílo se rovněž stále nachází v Národní knihovně. Karsten sám se zde výslovně hlásí ke Kästnerově členění vyšší matematiky. Vzhledem k nápadným podobnostem mezi skladbou kurzu a Kästnerovým dělením vyšší matematiky je překvapivé, že v Gerstnerově kurzu jeho učebnice nebyla užívána.

33 *Verzeichniß*, 1795 & 1800, s. [7]. Katalog Národní knihovny (Cat. IX A) obsahuje všechny tři svazky edice Lalandovy *Astronomie* z roku 1771; stejnou práci zmiňuje Gerstner i ve svém *Über die Bestimmung der geographischen Längen* (1785). Sylabus tedy pravděpodobně zmiňuje právě tento text.

34 B. BOLZANO. *Vlastní životopis*, s. 34. Poskytují mu ho rodiče v naději, že snad ještě poslechem dalších předmětů zvrátí své rozhodnutí vydat se na dráhu bohoslovce.

35 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* 38039/3376, s. [19r–25v].

36 Janderovo vysvědčení se o vyšší matematice v seznamu kurzů, které navštěvoval, nezmiňuje (*ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, listy 39118/804); v Gerstnerově reportu však stojí, že „roku 1799 kromě třetího ročníku filosofie navštěvoval ještě během jednoho roku kurzy praktické a vyšší matematiky“ (*ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* 38039/3376, s. [20v]).

37 Viz G. SCHUPPENER, K. MAČÁK. *Stanislav Vydra (1741–1804). Zwischen Elementarmathematik und nationaler Wiedergeburt*, s. 59–60.

práce se již plně soustředíme na matematiku elementární. *État des lieux* veškeré pražské matematiky Bolzanových let shrnuje následující tabulka:

Matematika: stolice	**Čistá: čísla a velikosti (*Grössen*)**	**Aplikovaná: matematické objekty nadané fyzikálními vlastnostmi**
Elementární: Vydra	1. ročník: aritmetika, geometrie, trigonometrie (Kästner, *Anfangsgründe*)	2. ročník: mechanika, hydraulika, astronomie (Kästner, *Anfangsgründe*)
Vyšší: Gerstner	1. ročník: počet diferenciální a integrální (Euler, *Introductio*)	2. ročník: mechanika, hydraulika, nauka o strojích 3. ročník: optika, astronomie (Karsten, Lalande)
Praktická: Herget	Umění a řemesla	Zeměměřičství, účetnictví, navigace, civilní inženýrství

3.2 Stanislav Vydra a kurz elementární matematiky

Stanislav Vydra (1741–1804), „srdečný Čech" podle Jiráska,[38] ne již tolik podle Bolzana,[39] byl vedle Jana Baltazara Tesánka (1728–1788), „českého Newtona" a Gerstnerova učitele a předchůdce na stolici vyšší matematiky, a Josepha Steplinga, zakladatele astronomické a meteorologické observatoře v Klementinu a prvního profesora experimentální fyziky v Praze,[40] jedním z vynikajících jezuitských profesorů, jimž bylo umožněno setrvat ve svých funkcích i po rozehnání řádu roku 1773.[41] Místo

38 Známý cordatus („srdečný", „srdnatý") Bohemus z románu F. L. Věk, významný obrozenec a matematik ve službách české věci: „Hodlám sepsati s pomocí Boží matematiku po česku, aby každý přirozený Čech se z ní snáze mohl učit a aby všechen svět viděl a se přesvědčil, že náš jazyk svatováclavský hodí se i k věcem vznešeným! Bude líp, ano bude, ale budeme-li pracovati. Protož pracujte, roztomilí přátelé […] a budiž každý z vás cordatus Bohemus, jenž se nebojí, jenž pravdu poví přímo a zastane se svého jazyka všude, kdykoliv a před každým" (A. JIRÁSEK. *F. L. Věk*, I, 14). Srov. A. RYBIČKA. *Přední křisitelé národa českého. Boje a usilování o právo jazyka českého počátkem přítomného století*, s. 39–65. I přes upřímnou snahu se však Vydrovo české matematické názvosloví („lomek", „čtedlník", „důstojnost" apod.) neujalo.

39 „Sice právě onen předmět, který mě v budoucnu upoutal nejvíce, matematiku, nepokládal jsem v prvních týdnech za hodna vůbec žádné pozornosti, protože mě zarážela poněkud hrubé chování tehdejšího profesora této vědy, jinak tak zasloužilého Vydry […]" (B. BOLZANO. *Vlastní životopis*, s. 28).

40 Viz také pozn. 17.

41 Viz S. VYDRA. *Gegenstände einer öffentlichen Prüfung aus den mathematischen Vorlesungen*, s. 4; srov. G. SCHUPPENER, K. MAČÁK. *Stanislav Vydra (1741–1804)*, s. 177.

profesora elementární matematiky zastával po další dvě desetiletí až do roku 1804, kdy se další výuka ukázala neslučitelnou s jeho nezadržitelně chátrajícím zdravím. Ještě téhož roku Vydra umírá.

Z Vydrových přednášek se zachovaly dosti důkladné Bolzanovy zápisky,[42] z nichž lze do značné míry usuzovat na náplň Vydrova kurzu. Sama jejich stavba – podtituly, poznámky na okraji, odrážky odstavců – zřetelně poukazují na skutečnost, že Vydra sledoval postup Kästnerových *Anfangsgründe*: začátek v podobě obecného uvedení do matematiky (*Erklärung der Mathematik*) a následně oddíl o aritmetice.[43]

> Matematika je věda o veličinách (*Grösse*), z řeckého *μανϑανω*, učit se. Prostřednictvím matematiky se člověk učí správně myslet. Úspornost (Bescheidenheit) pojmů, vět a důkazů. Pojmy musejí být jasné; důkazy správné a vystavěné na [ne]zvratných základech. Veličina je to, co je schopno nějakého zvětšení, nebo zmenšení.[44]

Stejně tak třídění veličin, jež v Bolzanových poznámkách bezprostředně následuje, svědčí o východisku v *Anfangsgründe*: veličiny se dělí na *abstraktní* a *konkrétní*, nakolik se ve velikosti spatřuje „jejich jediná vlastnost“, anebo se „zároveň s velikostí bere v potaz látka“;[45] a dále na *spojité* a *diskrétní*, které (ne)připouštějí žádný prostor (*Zwischenraum*) mezi jejich částmi a (ne)tvoří jeden celek. Přestože v Kästnerově učebnici se na příslušném místě nachází pouze první z obou rozlišení (definice spojitého je vyhrazena na začátek oddílu o geometrii),[46] příklad k distinkci abstraktního a konkrétního – osm mílí coby o sobě vzatá abstraktní délka oproti osmi mílím dělícím Prahu od Kolína[47] – poukazuje na výuku podle Kästnerovy učebnice.

---

42 Jde o dva sešity pojmenované *Vorlesungen aus der Mathematik. Vom Herrn Professor Stanislaus Wydra. Ins erste Jahr. 1ter Kurs*, každý o dvanácti listech: *„1 Heft“* (C II 14/2), *„2 Heft“* (C II 14/1). Poznámky jiného Vydrova studenta se nepodařilo dohledat, a nelze tak posoudit věrnost Bolzanova podání.

43 Viz C II 14/2, s. [3] a [8]; A. KÄSTNER. *Mathematischen Anfangsgründe*, I, s. 1 a 21.

44 C II 14/2, s. [3]. Tento výměr matematické vědy i veličiny samé je v druhé polovině 18. století zcela obvyklý i mimo pojednání Kästnerovo. Z německy psaných prací viz A. KÄSTNER. *Mathematischen Anfangsgründe*, I, s. 1; Ch. WOLFF. *Mathematisches Lexicon*, s. 863; J. FISCHER. *Anfangsgründe der reinen Mathematik oder die gemeine und höhere Rechenkunst, Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie*, s. 8.

45 C II 14/2, s. [3].

46 A. KÄSTNER. *Mathematischen Anfangsgründe*, I, s. 165.

47 C II 14/2, s. [3]. Srov. obdobný příklad in A. KÄSTNER. *Mathematischen Anfangsgründe*, I, s. 3. Obdobně rozlišení čísla/počtu (*Zahl*) a množství u Kästnera (tamtéž, s. 21) a v Bolzanových poznámkách (C II 14/2, s. [8]).

V návaznosti na uvedené rozdělení veličin se i matematika dělí na čistou či abstraktní a aplikovanou;[48] výsledné členění matematických nauk podle Bolzanových poznámek tak v podstatě odpovídá tomu, co v Kästnerově práci nalézáme pochopitelně v poněkud podrobnější a ucelenější podobě:

Kästner, *Mathematischen Anfangsgründe*	**Bolzanovy poznámky z Vydrova kurzu**
Čistá [elementární] matematika: aritmetika, geometrie, rovinná a sférická trigonometrie. I. Vyšší čistá matematika: obecná analýza; algebra, počet diferenciální a integrální. Aplikovaná matematika: mechanika (mechanika, statika, hydrostatika, hydraulika, aerometrie); optika (optika, katoptrika a dioptrika); astronomie (astronomie, matematická geografie, gnómonika, chronologie). ● [Architektonické nauky]: dělostřelectví, městská – čili civilní – architektura, vojenská architektura. ● Aplikace aritmetiky a geometrie: otázky hospodářské správy domácnosti, obchodnické výpočty, účetnictví; zeměměřičství, perspektiva. ● Speciální vědy: hudba, mořeplavectví (coby součást geografie), kormidlování lodí (na základě mechaniky).[49]	Čistá matematika: „Aritmetika, algebra, driometrie,[50] předměty (*Gegenstände*),[51] geometrie, diferenciální a integrální počet". Aplikovaná matematika: „Mechanika, hydrostatika, hydraulika, aerometrie, vědy optické: optika, katoptrika, dioptrika, perspektiva, astronomie, geografie, gnómonika, chronologie, pyrotechnie,[52] a architektura, umění, civilní stavitelství".[53]

[48] Tak i v A. KÄSTNER. *Mathematischen Anfangsgründe*, I, s. 3. Obdobné členění nacházíme i v F. ZENO. *Elementa Algebrae, Geometriae ac Trigonometriae*, s. 5–6. Tuto práci Vydra využíval k přednášce elementární matematiky před rokem 1784, tedy v době, kdy výuka matematiky probíhala v latině. Obtíže, které zakoušel náhlou změnou vyučovacího jazyka, jsou známy (viz např. A. RYBIČKA. *Přední křisitelé národa českého*, s. 46; a G. SCHUPPENER, K. MAČÁK. *Stanislav Vydra (1741–1804)*, s. 65); lze tedy předpokládat, že Vydra své staré latinské sešity z počátku prostě převedl do němčiny a že Zenovo pojednání si v jeho kurzu tak či onak udrželo svůj otisk i nadále.

[49] A. KÄSTNER. *Mathematischen Anfangsgründe*, I, s. 4–8.

[50] Pravděpodobně Bolzanova zkratka za „trigonometrii"; její definice totiž zní: „věda o nacházení neznámých částí trojúhelníku, jsou-li dány jeho tři části" (C II 14/2, s. [5]). Srov. A. KÄSTNER. *Mathematischen Anfangsgründe*, I, s. 4.

Též zbývající Bolzanovy zápisky z Vydrova kurzu svědčí stále o téže skutečnosti: nevykazují úplnou shodu s Kästnerovým pojednáním, avšak v ničem podstatném se od něj neodchylují. I proto se tudíž zdá, že Vydra, jak již bylo poznamenáno,[54] své původní latinské přednášky převedl do němčiny a doplnil o odkazy na Kästnera. Ať tak či onak, snad i vzhledem k jeho buditelskému zápalu není příliš pravděpodobné, že by náplň Vydrova kurzu doznala během let jakýchkoli fundamentálních teoretických změn; a tím méně pak v době reakce, za vlády Františka II., která, jak se dále ještě ukáže, originalitě a tvůrčímu přístupu – ústy snad císaře samého – výslovně nepřála.

> Nepotřebuji vzdělance, nýbrž poslušné, řádné občany. Vaší úlohou je k tomu vzdělávat mládež. Kdo mi slouží, musí učit to, co přikazuji; kdo toto nedokáže nebo přichází s novými myšlenkami (*neuen Ideen*), může jít, anebo ho odstraním sám.[55]

Zkrátka, pro akademický rok 1797–1798, kdy Bolzano začíná se studii, i pro rok 1804–1805, kdy se zúčastní konkurzu na místo profesora elementární matematiky, byly oficiální učebnicí *Mathematischen Anfangsgründe* Abrahama Gotthelfa Kästnera.

4. Výběrové řízení 1804

Uprázdnění stolice elementární matematiky na Karlo-Ferdinandově univerzitě se veřejně vyhlašuje 6. září 1804; o šest dní později se pak stručné oznámení o konkurzu objevuje v tisku.[56] Jeho písemná část byla naplánována na 25. října, ústní pak na následující den. Přihlásili se pouze dva kandidáti, pravděpodobně předem obeznámeni. Na zkoušku dohlížela komise, jíž předsedal Gerstner, od Vydrova onemocnění

---

51 Jedná se pravděpodobně o omyl. Studium (látkových) „předmětů“ by odporovalo samotné definici čisté matematiky; ve významu předmětu studia čisté matematiky by vedlo k poněkud absurdnímu nekonečnému regresu.

52 „*Pyrotechnia*“ na tomto místě, zdá se, odpovídá vědě o dělostřelectví (srov. Ch. WOLFF. *Mathematisches Lexicon*, s. 1129; J. JANDERA. *Beiträge zu einer leichteren und gründlicheren Behandlung einiger Lehren der Arithmetik*, s. 9).

53 C II 14/2, s. [5–6].

54 Viz pozn. 48.

55 Cituje P. STACHEL. Das österreichische Bildungssystem zwischen 1749 und 1918, s. 5. Stachel pravost císařových slov sice zpochybňuje, jedním dechem ale dodává, že výstižně zachycují základní ideu tehdejšího rakouského školství.

56 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* 28415/2421, s. [44r]. Nic podrobnějšího o dotyčných „novinách“ (*Zeitungen*) se nám zjistit nepodařilo.

suplující ředitel matematicko-fyzikálních studií, a její členy tvořili profesoři rozmanitých disciplín – Schmidt, David, Meißner, von Zürchauer, Mikan, Titze a Němeček.[57] Až na poslední tři, většina z nich oba kandidáty, Bolzana a Janderu, již znala; jednalo se o jejich učitele z filosofických studií.[58]

Z Gerstnerových „literárních životopisů“ obou kandidátů[59] se dozvídáme, že zatímco Jandera vstoupil roku 1799 k premonstrátům na Strahově, Bolzano docházel na kurz vyšší matematiky[60] a nadto navštěvoval soukromé lekce, na něž ještě přijde řeč. V tu dobu se také Jandera stal asistentem a posléze i suplentem churavějícího Vydry. Roku 1804 získal Jandera doktorát z teologie; Bolzano jej obdržel necelý rok od konání konkurzu v dubnu 1805, spolu s kněžským svěcením.[61]

Zkoušku, jak dále svědčí příslušné rukopisy,[62] připravil prof. Gerstner výběrem devíti úloh z *Anfangsgründe*, jež postoupil vysokému zemskému prezidiu (*hohe Landes-Presidio*). Úlohy podle Gerstnera byly zvoleny nejen tak, aby „si žádaly dokonalou obeznámenost s předepsanou učebnicí, ale též aby poskytly příležitost prokázat vyšší znalosti (*höhere Kenntnisse*)“.[63] Prezidium z připravených otázek vybralo tři, jež byly v zájmu zajištění nestrannosti předány předsedovi komise v zapečetěných obálkách a otevřeny teprve v den zkoušky, v přítomnosti obou kandidátů i členů komise. Nadiktovány byly následující úlohy:

I. Vypočítat povrch a objem kulové úseče z dané výšky úseče a průměru koule.
II. Jaké známe důkazy věty o rovnováze na páce? A jakými přednostmi či nedostatky se vyznačuje každý z nich?
III. Jakou rychlostí proudí voda z malých otvorů velkých nádob? Jak lze tuto rychlost určit na základě teoretických principů?[64]

---

57 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* B, s. [3v].

58 *Verzeichniß* 1795 a 1799.

59 Tyto životopisy byly sepsány na základě údajů zaslaných oběma kandidáty a tvoří součást závěrečné zprávy z konkurzu (*ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* 38039/3376).

60 Viz pozn. 34–36.

61 B. BOLZANO. *Vlastní životopis*, s. 42.

62 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* 38039/3376, s. [13r-13v]. Přehledné shrnutí průběhu a okolností zkoušky lze rovněž nalézt v M. PAVLÍKOVÁ. *Bolzanovo působení na pražské univerzitě*, s. 40–45.

63 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* 38039/3376, s. [19r].

64 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* A, s. [33r]. Zadání lze s nepatrnými obměnami nalézt v listech s odpověďmi obou kandidátů (*ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Bolzano, s. [13r]; *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Jandera, s. [3r, 9v a 11v]). Pro Bolzanovu odpověď viz Dodatek.

Zkouška začala devátou hodinou dopolední a skončila téhož dne. Jandera byl hotov kolem půl páté a elaborát odevzdal do rukou prof. Meißnera; Bolzano končil v šest, vypracované odpovědi od něj převzal prof. Titze.[65] Následujícího dne 26. října 1804, jak již víme, probíhala ústní zkouška spočívající ve výkladu a komentáři 14. tvrzení Kästnerovy geometrie:

> Rovnoběžníky o téže základně obsažené mezi týmiž rovnoběžkami mají stejný obsah.[66]

Od odpovědí ke konkurzu lze stěží očekávat matematické objevy, přesto jsou cenným dokladem o matematické institucionální kultuře Prahy přelomu 18. století – zejména pak pokud jde o dopady absolutistického státu na vzdělávací politiku. Oba kandidáti jistě dobře chápali (a víme to nyní i my),[67] že novoty nebyly vítány a že to, co od nich komise, potažmo budoucí zaměstnavatel očekává, je především důkladná znalost předepsaného učebního textu. Přesto odpovědi překvapí – Bolzano i Jandera si ve vypracování druhé otázky dovolili zpochybnit Kästnerovy základní principy mechaniky. Navíc, jak jistě tušíme, Bolzano ve vlastních odpovědích svrchovaně vládne ostřím ducha, kritizuje a projevuje soustavnou starost nikoli o co možná nejvěrnější zachování řádu Kästnerových tvrzení, nýbrž o fundamentální otázky matematické metody, povahy pojmů a prvotních vět.

Jistě, Bolzano je mimořádný případ. Nicméně, jak učí též zkušenost budoucích absolutismů, v matematice se, na rozdíl třeba od náboženství, jistá volnost a shovívavost ze strany moci zpravidla připouštěla – čím menší ohrožení v ní spatřovala a čím více ji ostatně v pozdější budoucnosti sama potřebovala. V obdobném duchu tak dává tentýž rok 1804 na příkaz císařův[68] povstat novému úřadu, stolici „náboženské nauky“ (*Religionslehre*) určené především k ideologické pacifikaci mládeže, „výchově poslušných občanů a vykořenění myšlenek francouzského osvícenství a Francouzské revoluce“.[69] A bude zajisté půvabným paradoxem dějin, že prvním držitelem tohoto úřadu při Filosofické fakultě se, po úspěšně složené konkurzní zkoušce, stane právě Bernard Bolzano.[70]

---

[65] M. PAVLÍKOVÁ. *Bolzanovo působení na pražské univerzitě*, s. 41.

[66] *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* A, s. [33v]; srov A. KÄSTNER. *Mathematischen Anfangsgründe*, I, s. 204.

[67] Viz pozn. 19, 55 a 63.

[68] *Gesetze und Verordnungen*, s. 22–26.

[69] J. ŠEBESTÍK. Bolzano's Lehrjahre, s. 293.

[70] B. BOLZANO. *Vlastní životopis*, s. 40–42. Viz též M. OTAVOVÁ. Výuka matematiky na pražské universitě v 1. polovině 19. století, s. 149.

4.1 Písemná zkouška, otázka první: elementární čistá matematika

Odpověď na prvou otázku Bolzano otevírá historickým úvodem do problému měření křivočarých útvarů. Zatímco podle něj Eukleidés postupuje „důsledně", a proto o metodách jejich výpočtů neučí nic, Archimédes naopak je za tímto účelem nucen (*nothgedrungen*) přijmout jako axiomy věty – „hypotézy", jak o pár let později Bolzano zdůrazní ve zvláštním spise –,[71] které nárokům na „věty nedokazované"[72] neboli axiomy „naprosto nedostačují". Tyto „předpoklady" z počátku Archimédova pojednání *O kouli a válci* shrnuje Bolzano následovně:

> Oblouk (křivá čára) přivrácený vůči své tětivě vždy vydutou stranou je delší než tato tětiva a kratší než součet tečen, jež jsou vedeny z jeho počátečních bodů a prodlouženy až do společného průniku.
>
> Zakřivená plocha přivrácená vůči rovině, kterou vymezuje, vždy svou vydutou stranou je větší než tato rovina a menší než součet rovin, které ji zvnějšku uzavírají.
>
> Objem vymezený zakřivenou plochou je větší než objem vymezený rovinami, jež jsou v zakřivených plochách obsaženy, a menší než objem vymezený rovinami takovými, které samu zakřivenou plochu obsahují.[73]

Jeho slova zjevně míří k jádru Eudoxovy metody vyčerpání, již Archimédes používá mimo jiné k výpočtu poměru mezi obsahem koule a jejího největšího kruhu.[74] A vlastně až do 17. století zůstává exhaustivní metoda jediným způsobem, jak co možná *matematicky* čelit křivočarým útvarům. Její autorita také vlivem autority Archimédovy i starověku obecně byla zpravidla přijímána, a tak se jí za účelem ospravedlnění a prosazení nových pojmů a metod dovolávala většina tvůrců infinitezimálních metod, Leibnize nevyjímaje.[75] Za prvního z nich tradičně platí Bonaventura Cavalieri, tvůrce „geometrie nedělitelných", analýzy geometrických útvarů za pomoci

---

71 Plným názvem jde o *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst: zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt* z roku 1807 (vydáno 1817). K rozboru viz S. RUSS. *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*, s. 281–290.

72 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Bolzano, s. [13r]; Dodatek, s. 197.

73 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Bolzano, s. [13r–13v]; srov. *Archimedis opera omnia*, I, s. 7–11.

74 Viz tamtéž, s. 125–127.

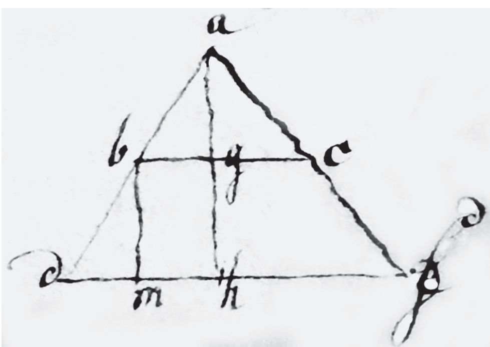
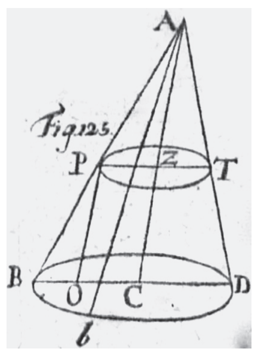
75 Srov. P. BEELEY. Infinity, Infinitesimals, and the Reform of Cavalieri: John Wallis and his Critics, s. 42–44.

nekonečného, či spíše nevyčerpatelného množství útvarů jim hraničních, tj. o rozměr nižších.[76] Pojem nedělitelného byl pak, jak známo, především díky Wallisovi a Pascalovi nahrazen – neméně rozporuplným – pojmem „*veličin*“ infinitezimálních, nesrovnatelných či nekonečně malých, jež se oproti nedělitelnému vyznačovaly nespornou výhodou: ač nesouměřitelné, s měřenou veličinou byly přesto stejného *rodu*, a mohly ji tudíž v nějakém smyslu skládat.

V 18. století, věku spojitosti, patřila nicméně analýza nedělitelných již dávno do historie. Hlavní snaha, v níž ostatně právě Bolzano dosáhne značných úspěchů, směřovala k nalezení rozumných, přesných, rigorózních základů počtu nekonečně malého.

V rámci výuky elementární matematiky na Filosofické fakultě v Praze se nicméně, snad z důvodů pedagogických, upřednostňovalo a probíralo řešení založené na metodě nedělitelných v té podobě, v jaké se nalézá na konci oddílu o měření těles *Mathematische Anfangsgründe*; a právě odtud vychází i odpověď Janderova. Nejprve tedy, nežli se vrátíme k Bolzanovi, představíme jeho řešení.

Prvním krokem obou, Kästnera i Jandery, je totiž tvrzení, podle nějž je povrch kolmého kruhového kužele roven součtu obsahu základny a polovině součinu obvodu základy (πr) a „strany kužele“ (délky strany pláště).[77] A tedy z kužele o vrcholu A průměru základny DF (obr. 1a) Jandera na základě podobných trojúhelníků DMB a BGA hledá povrch komolého kužele $BCFD$, kde $BA = x$, $BD = e$ a $DM = R{-}r$.

Jandera, písemná odpověď	**Kästner, *Anfangsgründe***
	
Obr. 1a[78]	Obr. 1b[79]

[76] Viz J. MAKOVSKÝ. Pacidius v labyrintu kontinua, s. 272–278.

[77] *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Jandera, s. [3r].

[78] *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Jandera, s. [3v].

[79] A. KÄSTNER. *Mathematischen Anfangsgründe*, I, Tab. VII.

Jandera správně uvažuje délku strany pláště kužele *ABC* za $x = \frac{er}{R-r}$, aniž by ukázal jak dostat délku strany celého kužele *ADF*;[80] přesto klade $e + x = \frac{eR}{R-r}$. Odtud pak může získat povrch obou kuželů $ADF = \frac{\pi R^2 e}{R-r}$ a $ABC = \frac{\pi r^2 e}{R-r}$; a jejich rozdíl, povrch komolého kužele $\pi e(R + r)$. Jestliže nyní, podotýká Jandera i Kästner, nastane $e = \frac{1}{\infty}$, pak rozdíl mezi *R* a *r* bude nekonečně malý, a tedy $R = r$; a pak povrch takového nedělitelného či nekonečně útlého prvku kužele bude roven $2R\pi e$.[81]

Díky tomuto poslednímu, klíčovému vztahu – nekonečně tenkého povrchu *řezu* kužele rovnoběžného s jeho základnou – nyní může Jandera vykročit k postupnému zodpovězení otázky. Za účelem určení povrchu úseče nyní uvažuje půlkruh *BFGD*, jenž rotací kolem vlastního průměru opíše kouli (Obr. 2a); k obvodu půlkruhu pak vede tečnu *AG* s prvkem (*Element*), bodem či „čarobodem" dotyku *FG*, kde $F - G = \frac{1}{\infty}$, a rotací kolem *KH* utváří kulový úsek *FGKH* odpovídající řezu kuželem *FGKH*.

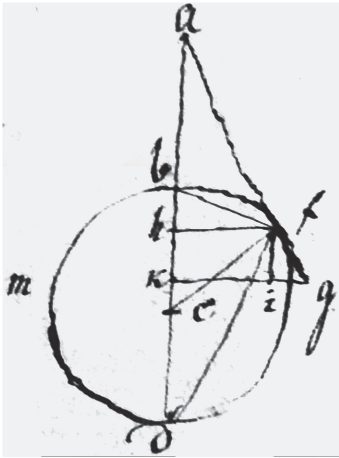
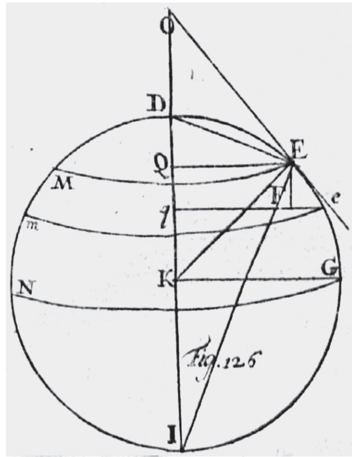
Zde konečně může přijít ke slovu výše nalezená formule $2R\pi e$; kde *HF* neboli $KG = S$, a tudíž $2S\pi e$. Stejným postupem – na základě podobných trojúhelníků – jako shora Jandera dostává $CF\colon HF = GF\colon IF$, a tím pádem $e = \frac{rFI}{S}$, odkud pak i $2\pi rFI$ a $2\pi rKB$, kde *FI* představuje výšku daného úseku a *KB* pak výšku celkové kulové úseče složené z libovolného množství obdobných řezů.[82]

---

80 Na základě úměry *DM : DB = DH : DA* neboli *R – r : e = R : x + e*.

81 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Jandera, s. [3v–4r]; srov. A. KÄSTNER. *Mathematischen Anfangsgründe*, I, s. 405.

82 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Jandera, s. [4v–6v]; srov. A. Kästner, *Mathematischen Anfangsgründe*, I, s. 405–507.

Jandera, písemná odpověď	**Kästner, *Anfangsgründe***
	
Obr. 2a[83]	Obr. 2b[84]

Na základě výpočtu obsahu základny kulové úseče (tvořící součást jejího celkového povrchu) Jandera konstatuje, že prodloužením oblouku *BF* až do *BD* dostáváme *BF* = *BD* = *2r* o povrchu $2\pi r^2$, a tudíž povrchu koule $4\pi r^2$, což podle Jandery představuje dokonce jakýsi „důkaz *a posteriori* správnosti postupu“[85] u Kästnera.

Ve druhé části své odpovědi vychází Jandera z teorému připisovaného Eudoxovi, podle nějž představuje kužel třetinu objemu válce o stejné výšce a základně.[86] Jeho snahou je prostřednictvím čtverce *ABDC* (obr. 3a) opsat polokouli, kužel a válec otáčením po řadě *ADC*, *ABC* a *ABDC* kolem *AC* a dokázat, že součet prvých dvou je roven třetímu; a tudíž že objem kulové úseče *AGE* a komolého kužele *ABFE* se rovná úseku válce *ABHE*.

Odtud však Jandera na základě výše zmíněné Eudoxovy poučky dovozuje, že objem polokoule odpovídá dvěma třetinám objemu válce πr^2, kde *AE* = *a*. Zde se však dopouští omylu, neboť pro objem komolého kužele nesprávně uvažuje formuli $\frac{4}{3}\left(B+\sqrt{BS}+S\right)$, namísto Herónova průměru $\frac{a}{3}\left(B+\sqrt{BS}+S\right)$.[87]

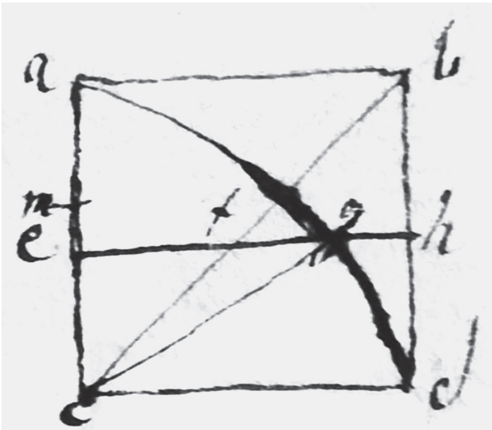
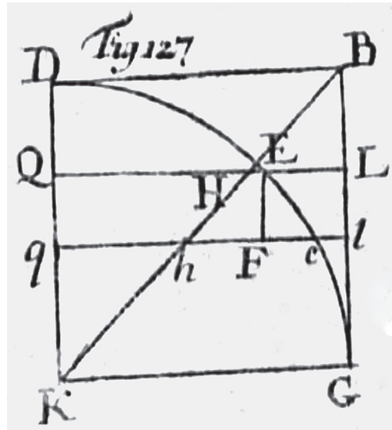
83 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Jandera, s. [4v].

84 A. KÄSTNER. *Mathematischen Anfangsgründe*, I, Tab VIII.

85 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Jandera, s. [4v–5r].

86 Srov. A. KÄSTNER. *Mathematischen Anfangsgründe*, I, s. 415.

87 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Jandera, s. [7v–9r].

<table>
<tr><th>Janderova odpověď</th><th>Kästner, Anfangsgründe</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Obr. 3a[88]</td><td>Obr. 3b[89]</td></tr>
</table>

Třebaže v tomto posledním kroku Jandera chyboval, podstatnější je podotknout, že právě v něm se odchyluje od Kästnerova postupu, který k Herónovu průměru nesahá.[90] Nadto na závěr svého řešení vyslovuje mínění, že úlohu mohl vyřešit snadno za pomoci diferenciálního počtu, avšak – v souladu s naší domněnkou výše – „nepřijde [mu] to v dané situaci patřičné (*zweckmässig*)“.[91] Shledává tudíž, že jde o matematiku elementární, nikoli vyšší, ačkoli tím zároveň připouští, že využít lze i novější, účinnější metody výpočtu.

Bolzanův zájem oproti tomu je zcela odlišný. Po uvedení Archimédova trojího tvrzení, jež podle něj nedostačuje nárokům kladeným na axiomy, dodává, že ovšem ani „úvahy nad nekonečně malým, pokud ovšem má stále být <u>něčím</u>, tuto obtíž neřeší od základu; skryjí ji před <u>očima</u>, ne však před <u>rozumem</u>“.[92] Rozporuplnost nekonečně malého zkrátka po způsobu nekonečně malého nevymizí, nejen co do zanedbání nekonečně malých vyšších řádů, ale i pokud má nekonečně malé být vůbec „něčím“, tj. *veličinou.* Pak se totiž můžeme s Bolzanem (ale i s mnohými dalšími před ním) tázat, jak by se křivočarý úsek mohl rovnat úseku přímočarému, anebo jak by se mohlo cokoli vypovídat (*prädiciren*) o nekonečně malém, kdyby

---

88 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Jandera, s. [7v]

89 A. KÄSTNER. *Mathematischen Anfangsgründe*, I, Tab VIIII.

90 Tamtéž, s. 411–412.

91 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Jandera, s. [9v]

92 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Bolzano, s. [13v]; Dodatek s. 197.

mělo znamenat „tolik co nic“.[93] V *Die drey Probleme der Rectification*[94] svoji kritiku prohloubí: nejenže rozdíl dx^{n+1} vzhledem k dx^n nelze pokládat za „základní pravdu“, ale jako takový je dokonce sám v sobě sporný.[95]

Ačkoli „stále nebyl nalezen obstojný prostředek“, jak se bez Archimédových tvrzení obejít, Bolzano přesto vyzdvihuje nedávnou *Théorie des fonctions analytiques*[96] J.-L. Lagrange, která je alespoň „ušetřena všech námitek, jež jsou vznášeny proti diferenciálnímu počtu; a má tu výhodu, že je úsporná, jednoduchá a obecná. Je jí dosaženo tím, že geometrické úvahy jsou do značné míry převedeny na čistě algebraické.“[97] K odpovědi na první otázku tak Bolzano přistupuje s pomocí Lagrangeova „funkcionálního počtu“, který je založen na předpokladu, že každou funkci je možno rozšířit do mocninné řady $f(x+i) = f(x) + p(x)i + q(x)\,i^2 + r(x)\,i^3 + \ldots$, až na případné izolované hodnoty x.[98] Sám Lagrange svůj počet uplatnil na geometrii v druhé části *Théorie des fonctions analytiques.*

Bolzanův postup je na poměry odpovědi vypracované při zkoušce pozoruhodný. Na základě Lagrangeových pojmů totiž nejprve dokazuje pět obecných tvrzení, jakousi teorii, jíž budou odpovědi na otázky pouze zvláštními případy. Lze však říci, že Bolzanova metoda sleduje tak či onak *věc samu* – řádný, „objektivně propojený“ teoretický postup od jednoduššího pojmu k odvozenému zračící se již ve výše zmiňované matematické prvotině. V tomto smyslu je Bolzanova metoda na Lagrangeově práci nezávislá, jak co do pořadí tvrzení, tak také pokud jde o samotný obsah.

Prvním z těchto tvrzení (tvrz. 1) se pokládá rovnost mezi dvěma veličinami M a N za předpokladu, že $N \leq M \leq N + iP$, kde i „i možno vzít libovolně malé“.[99] Počátečním

---

[93] Tamtéž.

[94] Viz pozn. 71.

[95] B. BOLZANO. *Die drey Probleme der Rectification*, s. VIII–IX. Hierarchii nekonečně malého pokládal když ne za spornou, pak za zhola arbitrární již Euler; viz s H. J. M. BOS. Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus, s. 68–69.

[96] Plným názvem *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'evanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits a l'analyse algébrique des quantités finies*, vychází v Paříži 1796. V Klementinu byla dostupná přinejmenším v německé překladu J. P. Grüssona, 1798 a 1799 (*Catalogus Mathematicorum* IX A 19, 1781ff., s. [138]). Lze se též domnívat, že patřila mezi díla, která Bolzano diskutoval na soukromých setkáních s Gerstnerem.

[97] *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Bolzano, s. [13v]; Dodatek s. 197.

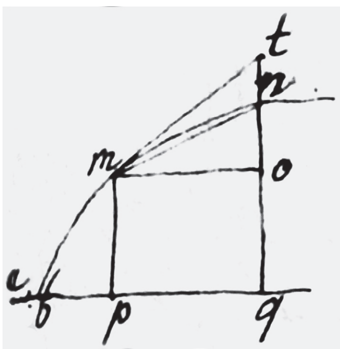
[98] C. G. FRASER. The Calculus as Algebraic Analysis: Some Observations on Mathematical Analysis in the 18th Century, s. 323.

[99] *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Bolzano, s. [13v–14r]; Dodatek s. 197.

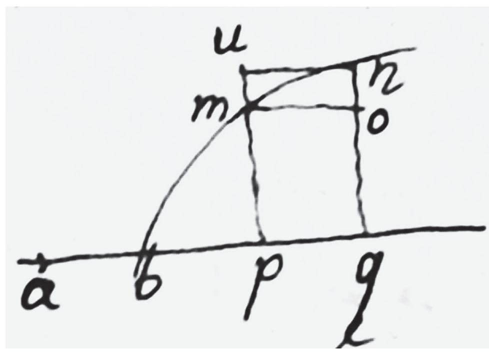
krokem pak je ustavení výrazu pro délku oblouku nějaké křivky (tvrz. 2); následuje obsah roviny vymezené nějakou křivkou (tvrz. 3); dále povrchu zakřivené plochy nějakého tělesa (tvrz. 4); a konečně objemu tohoto tělesa (tvrz. 5). Na jejich základě pak Bolzano odvozuje větu pro výpočet povrchu a objemu kulové úseče.

Na začátku tvrz. 2 uvažuje Bolzano prodloužení délky oblouku *bm* z *m* do *n* (obr. 4a), kde $pq = i$. „Neznámá funkce“ $F(x)$, tj. délka oblouku *bm*, se tímto na základě rozvoje $F(x+i)$ (až do druhého členu, kde λ je „libovolný neznámý zlomek“) promění na $F(x+i) = F(x) + iF'(x) + \frac{i^2}{2}F''(x+\lambda i)$. Odtud konečně plyne výraz $F(x+i) - F(x) = iF'(x) + \frac{i^2}{2}F''(x+\lambda i)$ pro délku oblouku *mn*.[100]

Bolzanova odpověď



Obr. 4a[101]



Obr. 4b[102]

V rámci tvrz. 3, jak známo, Bolzano hledá „obsah roviny vymezené křivou čarou a pravoúhlými souřadnicemi“.[103] Uvažuje tedy obdobně jako u předchozího tvrzení $F(x) = bpm$; prostřednictvím vzrůstu $ap = x$ do $pq = i$ pak (obr. 4b) plyne $mpqn = F(x+i) - F(x) = iF'x + \frac{i^2}{2}F''(x+\lambda i)$. „Na základě axiomu, jejž vzal za svůj Archimédes (a dokonce již Eukleidés)“ $mpqo < mpqn < nqpu$, odkud za předpokladu, že $mpqo = ifx$ a zároveň $nqpu = if(x+i)$, konečně plyne

[100] Tamtéž, s. [14r]; Dodatek s. 198–199, srov. J.-L. LAGRANGE. *Lagrange's Theorie der analytischen Funktionen*, II, s. 70.

[101] *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Bolzano, s. [14r]; Dodatek, s. 198.

[102] Tamtéž, s. [14v]. Dodatek, s. 199.

[103] Tamtéž.

$fx < F'x + \frac{i}{2}F''x + \lambda i < fx + if'x + \nu i$. A „stejně jako v tvrz. 2“ dostáváme, že $F'(x) = f(x)$.[104]

Bolzano tak postupně odvozuje tvrzení coby prvky teorie, z nichž bude možno odvodit výraz pro „zakřivený povrch tělesa utvořeného otáčením nějaké křivé čáry kolem osy abscis x“ – je jím primitivní funkce od $2\pi y[1 + y'^2]^{\frac{1}{2}} = 2\pi fx[1 + (f'x)^2]^{\frac{1}{2}}$. A pro objem takového tělesa, kde to bude primitivní funkce od $\pi.\, y^2 = \pi.\, (fx)^2$. Oba důkazy nicméně Bolzano pomíjí a pouze naznačuje, kudy by se měly ubírat. Neboť „u jejich vypracování [by] se přespříliš zdržel, a k otázce ve vlastním smyslu ani nepatří“;[105] a na ploše dvou odstavců konečně podává odpovědi na obě podotázky první úlohy písemné zkoušky.

Ačkoli Bolzano jedním dechem doufá, že mu to „bude odpuštěno“, už jen to, co stihl napsat, dostatečně svědčí nejen o jisté odvaze, s níž se u konkurzu na místo učitele elementární matematiky vytasil s nejpokročilejšími metodami soudobé infinitezimální analýzy, ale i o tom, že tyto metody důkladně znal a chápal jejich význam.[106] Viděli jsme rovněž, že již v písemné odpovědi u konkurzní zkoušky roku 1804 u těchto metod shledával jisté fundamentální nedostatky. O jejich nápravu se bude pokoušet na stránkách svých matematických prací po řadu budoucích let.

4.2 Otázka druhá: elementární aplikovaná matematika

Druhá otázka – výčet a zhodnocení důkazů věty o rovnováze na páce – naproti tomu určitou volnost a samostatnost v odpovědi snad přímo vynucovala. Takto Jandera předesílá vlastní výklad zadání:

> Nemám za to, že by se v otázce žádal rozbor veškerých důkazů známých v této věci, což by jistě nebyla práce na několik hodin za předpokladu, že by se k tomu měla probírat i mínění jednotlivých učenců (*sachverständige Männer*). Spíše se domnívám, že se v otázce žádá posoudit věc obecně.[107]

I zde si příslušná odpověď jistě žádá dobrou znalost odborné literatury, Kästnera především, ale ta sama o sobě nestačí. Otázka se dotýká principů, a je tudíž závažnější,

---

104 Tamtéž; srov. J.-L. LAGRANGE. *Lagrange's Theorie der analytischen Funktionen*, II, s. 66–69.

105 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Bolzano, [14v]; Dodatek, s. 200.

106 Srov. P. RUSNOCK. *Bolzano's Philosophy and the Emergence of Modern Mathematics*, s. 2–3.

107 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Jandera, s. [9v–10r].

než se na první pohled zdá. V 18. století, době hledání základů racionální mechaniky, to platí tím spíše.

Poučka o rovnováze na páce vyslovuje podmínky, jež musí splňovat dvě závaží zavěšená na páce tak, aby se nacházela v rovnováze. Klasickým místem, v němž byla věta vyslovena a dokázána, je zde samo sebou Archimédovo pojednání *O rovnováze rovin* (*De planorum aequilibriis*):

> VI. U souměřitelných velikostí (*megetha*) nastává rovnováha při vzdálenostech v obráceném poměru k jejich vahám [...].
> VII. A stejně tak pokud jsou velikosti souměřitelné, pak u nich nastane rovnováha pouze při zavěšení do vzdáleností vůči velikostem v obráceném poměru.[108]

Archimédův důkaz rozlišuje mezi souměřitelnými a nesouměřitelnými veličinami, pro ty užívá nepřímého důkazu. Zjednodušenou, syntetickou verzi důkazu – zmiňuje ji i Bolzano – podává ve svém komentáři k vlastnímu vydání Archimédových děl Barrow. Vychází z úvahy tyče *AB* o rovnoměrné hustotě, která se v rovnovážném stavu nachází právě tehdy, když je zavěšena ve svém středu či těžišti *C* (obr. 5b). Nechť je pak tyč *AB* rozdělena na libovolné, nestejně dlouhé části *AD, DB*; a takto získané nové tyče buďtež opět zavěšeny ve středech *E, F.*[109] Když nyní spojíme tyto body s *C*, bude *AD* vyvažovat *DB*.

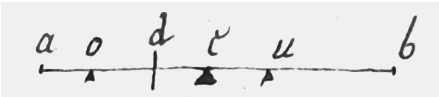
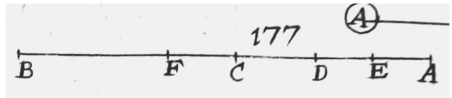
Kdyby tomu tak nebylo, byl by tu nějaký odlišný střed *X*, ve kterém by se tyč nacházela v rovnovážném stavu. To je však nesmyslné, neboť pak by při opětovném sloučení částí *AD* a *DB* tyč měla dvě těžiště; což jde proti základnímu předpokladu Archimédovy statiky, že každé těleso má jen jedno těžiště.[110] A naopak, pokud víme, že rovnováha na páce nastává v *E* a *F*, pak rovněž $EC = \frac{(AB-DA)}{2}$, $FC = \frac{AB-DB}{2}$; a tudíž $EC.FC = BD.DA$. To pak znamená, že velikosti *AD, DB*, zavěšené ve svých těžištích, budou v bodě *C* v rovnováze, jestliže jejich vzdálenosti od něj budou vůči velikostem v obráceném poměru.

---

108 *Archimedis opera*, III, s. 152–159. Bolzano používá druhý obvyklý název této práce *De aequiponderantibus*.

109 V případě Bolzana jsou to *O, U* (obr. 5a).

110 E. BENVENTUTO. *An Introduction to the History of Structural Mechanics: Part Statics and Resistance of Solids*, s. 60.

Bolzanova odpověď	**Barrow, *Archimedis Opera***
	
Obr. 5a[111]	Obr. 5b[112]

Jistě netřeba zmiňovat, že Archimédův důkaz je duchaplný. Obsahuje nicméně zamlčené, nezdůvodněné předpoklady, což u myslitelů 17. a 18. století nezůstalo bez povšimnutí. U věty, jež coby nejjednodušší princip mechaniky stojí v samotném jejím středu, je o to víc na pováženou, když se vypovídá o pojmech – jako váha nebo těžiště – zavedených, aniž by byly definovány.

Tak se o nápravu a pojmové vyjasnění principu pokoušel Descartes, který jej proměnil v úměru mezi příčinou a následkem a zároveň nejvýznačnější případ zákona zachování množství pohybu své veskrze statické vesmírné přírody. V jistém smyslu opačně pak přistupují k poučce o rovnováze autoři jako Newton nebo Varignon, kteří se ji snaží dokázat na základě věty o skládání sil, vzaté na způsob fundamentálního principu mechaniky.

> Těleso společným působením dvou sil opíše úhlopříčku rovnoběžníku ve stejném čase, v jakém by opsalo každou jeho stranu zvlášť.[113]

Nikoli překvapivě se výuka mechaniky na pražské univerzitě konce století odvíjela dle tradiční osnovy počínaje statikou, tj. studiem jednoduchých strojů, mezi nimiž páka zaujímá prvořadé postavení.[114] Jasně se to ukazuje již z výše zmiňované[115] Vydrovy učebnice *Sätze der Mechanik*: studiem „matematické páky“ se jeho pojednání – v návaznosti na Kästnerovy *Anfangsgründe der angewandte Mathematik* (1759) – otevírá.[116]

---

111 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Bolzano, s. [15v]; Dodatek, s. 202.

112 I. BARROW (ed.). *Archimedis Opera,* I, Fig. 177.

113 I. NEWTON. *Philosophiae naturalis Principia mathematica,* s. 13. Viz též P. VARIGNON. *Projet d'une mécanique nouvelle.*

114 Viz HERON. *Les mécaniques, ou l'élévateur des corps lourds,* s. 115–126; srov. *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt,* III, s. 1117.

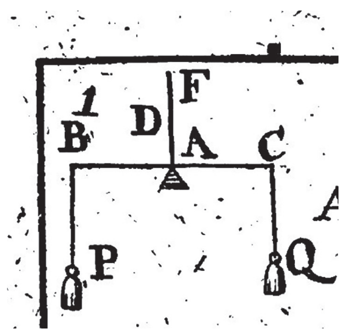
115 Viz pozn. 27.

116 S. VYDRA. *Sätze der Mechanik,* s. 5; srov. A. KÄSTNER. *Archimedis opera, Anfangsgründe der angewandte Mathematik,* s. 8 ff.

Kästnerovo podání důkazu věty o rovnováze na páce jistě patří mezi to nejhodnotnější, co svým nesčetným čtenářům zanechal. Vychází toliko z pojmu tíhy či síly (*Pressung*) působící na závaží; a to z následujících vět, které zde ve stručnosti představíme (obr. 7):

> 16. Tvrzení. Pevná přímá čára *BC*, jež je sama bez váhy, leží vodorovně s oporou ve středu *A* tak, že každý z jejích konců se může poněkud pozdvihnout, aniž by se přitom posunul bod *A*, zatímco druhý konec právě o tolik poklesne. Nechť jsou na obou koncích zavěšena stejná závaží *P*, *Q*. Pak tvrdím, že žádné z nich nepoklesne ani nestoupne […].[117]
> 18. (důsledek). Závaží, jež nemají spadnout, musí být podepřena. Podepírat je nemůže nic jiného než opora v bodě *A*. Tudíž je tato opora vystavena plné zátěži $2P = 2Q$.[118]

Kästner, *Anfangsgründe der angewandten Mathematik*



Obr. 7[119]

Sám autor patrně obě tvrzení pokládal za samozřejmé skutečnosti.[120] Prvé odpovídá Archimédovu postulátu, že „stejná závaží ve stejných vzdálenostech jsou v rovnováze“.[121] Avšak jeho platnost zajisté nemůže zajistit pouhá zkušenost, neboť každou z nich přesahuje. Obecně je třeba připustit, že je založena teprve v principu dostatečného důvodu.[122] Obdobným způsobem, prostřednictvím symetrie, zdůvodňuje

[117] Tamtéž, s. 5.

[118] Tamtéž, s. 6.

[119] A. KÄSTNER. *Anfangsgründe der angewandte Mathematik*, Tab. I.

[120] Tamtéž, s. 6.

[121] E. BENVENUTO. *An Introduction to the History of Structural Mechanics*, s. 44.

[122] Srov. G. W. LEIBNIZ. *Principium scientiae humanae*, A VI, 4, 671.

své tvrzení i Kästner. Stejně tak u tvrz. 16 podle Kästnera: kdyby na páku nepůsobila zdvižná síla, pak by tu nebyl žádný důvod, proč by ji závaží *P* nebo *Q* neměla stáhnout kolmo dolů.

Je pozoruhodné, a již jsme to zmiňovali, že oba kandidáti ve svých odpovědích projevili jistou nespokojenost s Kästnerovým postupem. Jandera tak podotýká, že za základní tvrzení byly často pokládány věty spíše odvozené. Jako příklady uvádí právě Archimédův postulát nebo princip Descartův a Kästnerova výše představená tvrzení považuje jen za – nikoli zcela přesvědčivou – „významnou reformu".[123] Bolzanova – spíše jen naznačená – kritika naproti tomu je v duchu *Betrachtungen über einige Gegenstände*[124] povahy logicko-metodologické a týká se omezujícího požadavku rovnoběžnosti (kolmo) působících sil, při němž jedině je Kästnerův důkaz správný.

Bolzano se proto rozhoduje předložit důkaz vlastní,[125] jenž zůstane, pravděpodobně pro nedostatek času, pouhým náčrtem. Východiskem důkazu je páka v rovnovážném stavu (obr. 8), kde veškeré danosti systému, síly a vzdálenosti lze uvažovat vždy za funkce všech zbývajících. Jestliže p, q jsou silami působícími na páku a x, y jejich vzdálenostmi od podpěry C, pak platí $q = f(p, x, y)$; a stejně tak i $p = f(q, x, y)$.[126]

Vše tedy závisí na povaze funkce f. Tak Bolzano nejprve uvažuje vyjádřit $f(p, x, y) = p \cdot \varphi(x, y)$ jako $f(q, x, y) = q \cdot \varphi(x, y) = p$, kde $\varphi(x, y)$ představuje novou funkci obou vzdáleností. K tomuto kroku text bohužel nenabízí žádné další vysvětlení; vzdálenosti nicméně lze vždy položit do poměru, a jde vposled vždy o tento *rovnovážný poměr*, pokud se uvažuje o rovnovážném stavu. Další krok by tedy spočíval v nalezení takového poměru vzdáleností x a y. Vyjádřeno matematicky bychom na základě symetrie dostali $q = f(p, y, x) = p \cdot \varphi(y, x)$, a tím pádem $\varphi(x, y) \cdot \varphi(y, x) = 1$.[127]

123 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Jandera, s. [11r].

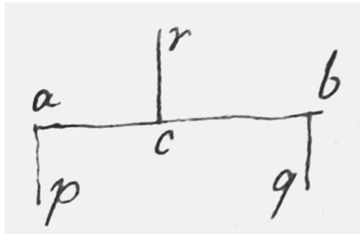
124 S. RUSS. *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*, s. 122.

125 Rukopisné poznámky k shodnému důkazu (včetně totožného diagramu a stejně volených písmen) byly vydány in B. BOLZANO. *Miscellanea Mathematica 1+2*. Nápadné shody naznačují, že mohly být sepsány v době kolem konkurzu 1804.

126 Tamtéž.

127 V textu zkoušky omylem stojí jako výsledek součinu 0, což ovšem na podstatu Bolzanova uvažování nemá vliv.

Bolzanova odpověď



Obr. 8[128]

Bolzanova pozornost se dále ubírá k rozložení a povaze exponentů funkcionálních výrazů, avšak stran zbylého dokazování již nezbývají než dohady. Zcela zjevná je naproti tomu skutečnost, že zamýšlený důkaz plně spočívá v algebře a teorii funkcí. V tom se zásadně odlišuje od přístupu a stylu uvažování důkazu Kästnerova i dalších, jež měly být v rámci zkoušky zhodnoceny. Stejně jako v případě otázky prvé tak můžeme uzavřít, že Bolzanovy znalosti racionální mechaniky, načerpané snad i díky Gerstnerovým lekcím, byly již roku 1804 plně na vrcholu doby, zároveň však shledány coby nedostačující.

5. Výsledek a závěry

Výsledek výběrového řízení již známe. Ze zachovaných zpráv nyní můžeme sledovat úseky klikatých cest, jimiž se k němu došlo. Co vše padalo na váhu? Pokud jde o první otázku, komise se usnesla, že Janderova odpověď věrně následovala postup Kästnerova dokazování; stejně tak ovšem jasně konstatovala omyl, jehož se Jandera v druhé části řešení dopustil.[129] Bolzano naproti tomu za svoji odpověď sklízí samou chválu: nejenže otázku správně zodpověděl, ale vyložil a zhodnotil různé metody kvadratur.

> Poukázal na těžkosti plynoucí z Archimédových základních vět i novějšího diferenciálního počtu. Zvolil proto nejnovější a nejpřísnější ze všech známých metod, totiž funkcionální počet Lagrangeův, a jeho pomocí správně a beze zbytku vyřešil zadanou úlohu.[130]

[128] *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, Bolzano, s. [17r]; Dodatek, s. 204.

[129] *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* B, s. [29v].

[130] *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* B, s. [28v–29r].

Pokud jde o druhou otázku, komise nejen opětovně ocenila Bolzanovu sečtělost a zběhlost v matematické literatuře, ale rovněž připojila pochvalu za originalitu, neboť, jak jsme viděli v předchozím oddílu, Bolzano se pokusil též o vlastní důkaz. Janderova odpověď naproti tomu byla zhodnocena jako postačující, byť nezanechala výrazný dojem. Jandera podal pouhý výčet některých důkazů a omezil se na stručný komentář Kästnerova důkazu.

Ve třetí otázce byl jeho výsledek ještě chudobnější. V naší práci jsme tuto otázku neprobírali z jednoduchého důvodu: není příliš o čem pojednávat. Komise zaznamenala Janderovu omluvu a přijala ji – jeho povinnosti jakožto vyučujícího suplenta mu nedovolily dospět až ke studiu hydrodynamiky.[131] Bolzano sice odpověď na třetí otázku vypracoval, avšak ta se nestala předmětem zprávy komise. Vzhledem k tomu, že Jandera ve své odpovědi zcela selhal, patrně k hodnocení výsledku zkoušky nebylo Bolzanova řešení zapotřebí.[132]

Názor komise na výkony kandidátů v ústní zkoušce byl ovšem opačný.

> Profesoři byli jednomyslní v tom, že ačkoli v ústní zkoušce pronikl prvý, Bernard Bolzano, hlouběji do předmětu otázky, přesto se poněkud odchýlil od pořadí předpokladů, jak je podává Kästner, v tom smyslu, že nejprve představil teorii podobnosti trojúhelníků, která je v Kästnerovi vyložena až posléze. Druhý, totiž L. Jandera, se uvedl jasnějším a pro žáky přístupnějším rozborem, setrval při Kästnerově pořádku, a krom úplného důkazu tohoto tvrzení z něj rovněž odvodil několik důsledků.[133]

Zde patrně promluvila dvouletá učitelská zkušenost. Zatímco Bolzano vycházel v duchu svého reformního matematického programu od prvotnějších pojmů, podobnosti a symetrie, Jandera se přidržel řádu tvrzení u Eukleida a Kästnera. Pokud šlo o ústní přednes a výuku žáků, pronikavé uvažování (*gründlicher Einsicht*) a hloubka pojednání vyšly u komise naprázdno. Jandera měl jasnější hlas a neodchyloval se od řádu výkladu.

---

131 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* B, s. [30r–30v].

132 Bolzanovo řešení nabízí opět spíše jen náčrt odpovědi, který však dosvědčuje Bolzanovy znalosti příslušné odborné literatury. Spočívá v idealizaci „částeček vody“, jež umožňuje uplatnění zákona volného pádu. Odtud se získává tzv. Torricelliho teorém, podle nějž je požadovaná rychlost rovna $\sqrt{2gh}$ (v odpovědi Bolzano chybně uvádí $2\sqrt{gh}$). V druhé části odpovědi Bolzano doznává, že pro skrovné znalosti „vnitřní přirozenosti“ tekutých těles je „nepřípadné vyvozovat zákony jejich pohybu na základě teoretických důvodů; proto se zde také nejpřednější ze současných hydrodynamiků, např. Bossut, du Buat ad., se znamenitými úspěchy uchylují do výsostného útočiště zkušenosti“.

133 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* 38039/3376, s. [24r].

V těžkém rozhodování mezi talentovanějším Bolzanem a zkušenějším a zasloužilejším Janderou by nejraději druhému přisoudili stolici elementární matematiky a prvému stolici matematiky vyšší – kdyby nějaká taková byla kde k mání.[134] Odtud lze již snadno uhodnout, že Jandera pro výuku elementární matematiky *dostačoval* – a snad byl i vhodnějším kandidátem. Přesto komise nakonec rozhodla v Bolzanův prospěch. Anebo, řečeno lépe: zatímco Bolzana doporučila, Janderu nezamítla.[135]

Konečné slovo ovšem, jak již známo, měl vídeňský dvůr. Do jeho rozhodnutí promluvila souběžná výběrová řízení na místa katechetů při staroměstském gymnáziu a filosofické fakultě, jakož i zvláštní souhra okolností politických, administrativních a časových.[136] Jestliže v rámci tohoto řízení byl Bolzano pro svůj mladý věk shledán vhodnějším pro místo katechety při staroměstském gymnáziu a pro filosofickou fakultu přicházel do úvahy až na druhém místě; kandidát původně doporučený na stolici náboženské nauky na filosofické fakultě, Joachim Cron, nedlouho po konkurzu, 18. října 1804, získal místo dogmatiky.

Politická váha, jež byla nově zřízeným stolicím katechismu přikládána, pak zřejmě způsobila, že s blížícím se počátkem školního roku vídeňská vláda na obsazení tohoto místa velice naléhala. I to byl patrně jeden z důvodů, proč byl dekretem z 25. února 1805 na místo *Religionslehre* při filosofické fakultě prozatímně jmenován v pořadí druhý úspěšný kandidát, Bernard Bolzano.[137] Avšak vzhledem k výsledkům a znalostem prokázaným konkurzní zkouškou, a „aby se nenechala uhasnout jeho horlivost pro vědu", panovník ve stejném dekretu přislíbil Bolzanovi *in futuro* „zvláštní ohled při zadávání matematické stolice na některém jiném ústavu".[138] O jinou stolici matematiky se však Bolzano již nikdy neucházel.

Co nám konkurz může povědět s výhledem k Bolzanově známé matematické tvorbě? K problémům, které při vypracování otázek předestřel, se vrátí, jak už bylo zmíněno, o šest let později v *Die drey Probleme der Rectification*,[139] pokud jde o jednoduchou podstatu a samostatnost axiomů a povahu „vlastní teorie";[140] ale stejně tak i daleko později, roku 1842, ve spisu *Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte* ve spojitosti s otázkou spojitosti v přírodě. Snahy

---

134 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* 38039/3376, s. [25r].

135 *ČG Publicum* 1796–1805, 98/755, *Protokoll* 38039/3376, 6/12/1804, s. [82v].

136 M. PAVLÍKOVÁ. *Bolzanovo působení na pražské univerzitě*, s. 44–45.

137 *ČG Publicum* 1796–1805, 97/1245, 7285/606.

138 M. PAVLÍKOVÁ. *Bolzanovo působení na pražské univerzitě*, s. 45.

139 Viz pozn. 71.

140 Viz J. ŠEBESTÍK. *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*, s. 258–276; S. RUSS. *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*, s. 20–23.

o odstranění nedostatků Lagrangeovy metody mimo jiné povedou k *Functionenlehre*; ke kritice a pokusu o reformu Eukleidových *Základů* se Bolzano vrací ve spise *Anti--Euklid.*[141] Je zjevné, že již text konkurzu z roku 1804 svědčí o prvořadé důležitosti, jíž Bolzano bude přikládat náležité péči o základy a „objektivní zdůvodnění" teorií a metod, onu „vnitřní souvislost" jeho matematického myšlení. Avšak tato péče, jíž se budou tyto a jiné budoucí Bolzanovy práce vyznačovat, vychází z kritického postoje vůči dobovým matematickým pojmům, zjevnostem a postupům – postoje představeného a rozvíjeného již v odpovědích ke konkurzu roku 1804. Zatímco vítězný kandidát v této tradiční matematické praxi bude pokračovat po dlouhá desetiletí, uzavřít můžeme s Janem Šebestíkem, a v duchu východiska této práce, že

> se můžeme jedině dohadovat, jak by vypadaly dějiny matematiky, kdyby se Bolzano stal v Praze profesorem této vědy a založil zde svoji školu.[142]

S jistotou lze říci, že opožděné docenění Bolzanových fundamentálních vhledů, ochuzení řady generací studentů o kritické uvedení do podstaty soudobých metod a vposled zrození „osamělého myslitele" budou těmi nejtrvalejšími z výsledků, jež dějinám matematiky zanechá konkurz na místo učitele elementární matematiky v Praze roku 1804.

Dodatek

Otázky ke konkurzní zkoušce

na stolici matematiky při pražské univerzitě.

Dne 25. října 1804. Bernard Bolzano

I. Vypočítat povrch a objem kulové úseče z dané výšky úseče a průměru koule.
II. Jaké známe důkazy věty o rovnováze na páce? A jakými přednostmi či nedostatky se vyznačuje každý z nich?
III. Jakou rychlostí proudí voda z malých otvorů velkých nádob? Jak lze tuto rychlost určit na základě teoretických principů?

[141] B. BOLZANO. *Anti-Euklid*, s. 203–215, zejména s. 204.

[142] J. ŠEBESTÍK. Bolzano's Lehrjahre, s. 293.

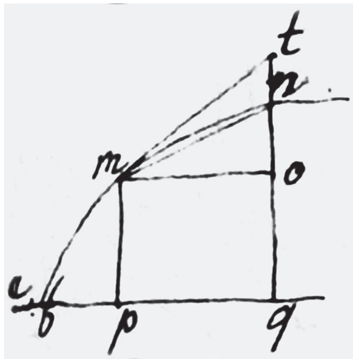
Odpověď

Otázka první. Eukleidés učí, jak s dokonalou přesností vypočítat povrch a objem těles ohraničených rovinami. Jak ale spočítat plochu zakřivenou, anebo rovnou, avšak ohraničenou křivkami, jakož i těleso vymezené zakřivenými plochami – o tom neuměl dokázat nic, aniž by přijal za axiom nové tvrzení, které do té doby nikdy nepoužil. Za své je z nutnosti přijal až Archimédes, poněvadž nespatřoval jiný způsob, jímž by překročil kámen úrazu, na kterém ztroskotal jeho do důsledku uvažující předchůdce. Archimédes tak položil následující tvrzení za nedokazované pravdy: „Oblouk (křivá čára) přivrácený vůči své tětivě vždy vydutou stranou je delší než tato tětiva a kratší než součet tečen, jež jsou vedeny z jeho počátečních bodů a prodlouženy až ke společnému průniku. Zakřivená plocha přivrácená vůči rovině, kterou vymezuje, vždy svou vydutou stranou je větší než tato rovina a menší než součet rovin, které ji zvnějšku ohraničují. Objem vymezený zakřivenou plochou je větší než objem vymezený rovinami, jež jsou v zakřivených plochách obsaženy, a menší než objem vymezený rovinami, které samu zakřivenou plochu obsahují.“ – Ačkoli již dlouho panuje shoda na tom, že toto trojí tvrzení mezi základní věty ve vlastním smyslu nepatří, stále proti němu (po mém soudu) nebyl vynalezen obstojný prostředek. Úvahy nad nekonečně malým, pokud ovšem má stále být něčím, tuto obtíž neřeší od základu; skryjí ji před očima, ne však před rozumem, poněvadž ani nekonečně malý úsek křivé čáry či plochy není rovný.

Kromě toho také představa nekonečně malého skýtá své vlastní těžkosti, a to kvůli zanedbání dx^{n+1} vzhledem k dx^n, což pak geometrickou obtíž ještě zesiluje. – Kdyby nekonečně malé mělo znamenat tolik co nic, pak je mimo chápání mé i mnohých dalších, jak se o takových nic dá vůbec něco vypovídat. – Metoda, již představil Lagrange ve svém znamenitém *Traité des fonctions analytiques*, se bez archimedovských axiomů neobejde, ale i tak je zbavena všech námitek, které jsou vznášeny proti diferenciálnímu počtu; a má tu výhodu, že je úsporná, ~~a~~ jednoduchá a obecná. Je jí dosaženo tím, že geometrické úvahy jsou do značné míry převedeny na čistě algebraické; výhodu, která se ocení tím více, čím obšírnější je postup Archimédův. K odpovědi na stávající otázku využiji funkcionálního počtu, který ve zmiňované práci podal Lagrange; a nejprve dokáži následující tvrzení.

1. tvrzení. Pokud má veličina M ležet vždy mezi dvěma veličinami N a $N + iP$ tak, že je i možno vzít libovolně malé; pak musí platit $M = N$.
Důkaz. Neboť $M - N$ musí být buďto = 0, anebo > 0 a zrovna tak $N + iP - M$ buďto = 0, anebo > 0. Jestliže však M není = N, pak $M > N$ a $M - N = n^2$ bude nějaké klad. číslo, pak musí $iP - n^2$ pro každou libovolně malou hodnotu i zůstat = 0, nebo > 0; pak stačí vzít $i < \frac{n^2}{P}$; a tehdy $iP - n^2$ zajisté bude záporným. Což je proti předpokladu.

2. tvrzení. Délka oblouku křivky, u níž pro pravoúhlé ordináty platí rovnice $y = fx$, je primitivní funkcí abscisy x, jejíž první derivace ponese výraz $[1 + f(x')^2]^{\frac{1}{2}}$.



Důkaz. Nechť Fx představuje neznámou funkci délky oblouku bm daného abscisou $ap = x$; nechť tato nyní vzroste tak, že konečný úsek $pq = i$, který se vezme natolik malý, aby křivka z m do n byla vůči struně vždy vydutou; pak se Fx stane

$$F(x+i) = Fx + i.Fx' + \frac{i^2}{2}F''(x+\lambda i),$$

kde λ je libovolný neznámý zlomek. Odtud tedy bude

$$F(x+i) - F(x) = iF'(x) + \frac{i^2}{2}F''(x+\lambda i)$$

délka oblouku mn. Spolu s Archimédem pak můžeme vzít jako základní tvrzení, že za uvedených podmínek bude tato délka větší než přímočará tětiva mn; zároveň však menší než součet čar $mt + tn$, kde mt představuje tečnu k m, kterou prodloužíme, dokud se neprotne s rovněž prodlouženou ordinátou nq; poněvadž tyto dvě čáry zahrnují oblouk mn.

Nyní vypočítám mn; mt, tn. Ježto ordináta $mp = fx$; pak $nq = f(x+i)$; a

$$no = f(x+i) - fx = if'x + \frac{i^2}{2}f''(x+vi),$$

kde v je libovolný zlomek. Pak odtud plyne

$$mn = [mo^2 + on^2]^{\frac{1}{2}} = \left[i^2 + i^2 f'(x)^2 + 2i^3 f'(x).\frac{f''(x+vi)}{2} + \frac{i^4 f''(x+vi)^2}{4}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= i\left[[1 + f'x^2] + 2if'x.\frac{f''(x+vi)}{2} + i^2\frac{f''(x+vi)^2}{4}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= i\left([1 + f'x^2]^{\frac{1}{2}} + i.P\right),$$

když veličinu v závorkách upravíme na základě binomického rozvoje; kde P je funkcí x, i. –

Pro vyjádření mt, tn je zapotřebí znát úhel tmo, který svírají tečna a abscisa. Pokládám zde za dokázané, že jím je tang$tmo = f'x$. Odkud plyne $ot = i.f'x$;

$$mt = i[1 + (f'x)^2]^{\frac{1}{2}};$$

$$tn = to - no \;=\; if'x \;- f(x+i) + fx \;=\; -i^2 f''(x + v.i).$$

Odtud pak suma

$$mt + tn = i[1 + (f'x)^2]^{\frac{1}{2}} + \frac{i^2}{2} f''(x + v.i)$$

/: poněvadž bez ohledu k jeho znaménku tn se přičítá :/ Ježto pak oblouk mn, > tětivy mn, musí být < $mt + tn$; dostáváme tak

$$i.F'x + \frac{i^2}{2}F''(x + \lambda i) > i[1 + (f'x)^2]^{\frac{1}{2}} + i^2.P; < i[1 + (f'x)^2]^{\frac{1}{2}} +$$

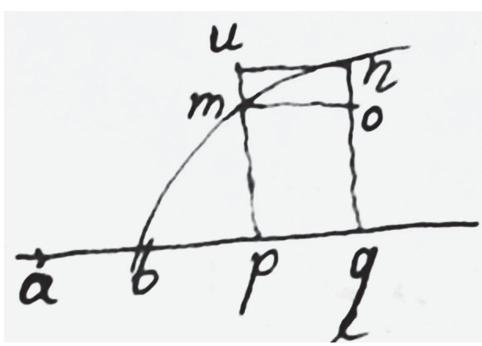
$$+ \frac{i^2}{2} f''(x + v.i) \text{ čili } F'x + \frac{i}{2}F''(x + \lambda i) > [i + (f'x)^2]^{\frac{1}{2}} + i.P;$$

$$< [1 + (f'x)^2]^{\frac{1}{2}} + \frac{i.f''(x+v.i)}{2}.$$

Tyto výrazy pak musejí platit nejen pro hodnotu $i = pq$, nýbrž i pro <u>každé menší</u>, tak malé, jak požadujeme. – Vydělíme $\frac{i}{2} F''(x + \lambda i)$ ze všech tří veličin. V zájmu stručnosti nazývejme druhou z veličin N a její rozdíl oproti třetí veličině iP, neboť je násoben i; pak bude $F'x > N$; $< N + ip$. Takto $F'x = N$ pro každou jakkoli malou hodnotu i; odkud pak podle shora uvedeného tvrzení

$$F'x = [1 + (f'x)^2]^{\frac{1}{2}}\ .$$

3. <u>Tvrzení.</u> Obsah roviny vymezené křivou čarou a pravoúhlými souřadnicemi je primitivní funkcí abscisy x takovou, že její první derivací je $y = fx$.



Důkaz. Budiž Fx touto neznámou funkcí, pak $Fx = bpm$; nechť $ap = x$ vzroste tak, aby $pq = i$, které se vezme natolik malé, že ordináty mp, nq, mezi p a q buďto vždy jen rostou, anebo klesají. Předpokládám prvé; v druhém případě postupujeme obdobně. – Je část obsahu

$$mpqn = F'(x+i) - Fx = iF'x + \frac{i^2}{2}F''(x+\lambda i).$$

Veďme *mo*, *nu* kolmo na ordináty *nq*, *mp*; pak podle předpokladu a na základě axiomu, který vzal za svůj Archimédes (a dokonce již Eukleidés), bude plocha *mpqn* větší ~~menší~~ než plocha pravoúhelníku *mpqo* a menší ~~větší~~ než plocha pravoúhelníku *nqpu*.

Nuže bude ona $= i\,.\,fx$, tato pak $= i\,.\,f(x+i) = i\,.\,fx + i^2\,.\,f'(x+vi)$. Abychom určili $F'x$, vyjdeme z těchto dvou podmínek

$$iF'x + i^2.\frac{F''(x+\lambda i)}{2} > i.fx; < i.fx + i^2.f'(x+vi)$$

pro každou libovolně malou hodnotu i, která je menší než pq. Neboli

$$F'x + i.\frac{F''(x+\lambda i)}{2} > fx; < fx + i.f'(x+vi).$$

Odtud pak stejně jako v 2. dostáváme, že $F'x = fx$.

4. Tvrzení. Zakřivený povrch tělesa utvořeného otáčením nějaké křivé čáry kolem osy abscis x je funkcí abscisy takovou, že její první derivace

$$= 2\pi y[1+(y')^2]^{\frac{1}{2}} = 2\pi fx[1+(f'x)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Důkaz. Dokážeme to úplně stejným způsobem jako shora ve 2. a 3. Jestliže se křivka *bm* z 2. otáčí kolem *ap*; pak oblouk *mn* opíše zakřivenou plochu, která bude větší než plocha opsaná tětivou *mn*, ale zároveň menší než zakřivený povrch opisovaný společně čarami *mt*, *tn*; poněvadž tyto dvě čáry křivku obsahují. Nyní vypočítáme tyto dvě čáry, a dále se postupuje shora uvedeným způsobem.

5. Tvrzení. Objem tělesa utvořeného otáčením nějaké křivky kolem její osy abscis x je funkcí x takovou, že její první derivace $= \pi\,.\,y^2 = \pi\,.\,(fx)^2$.
Důkaz. Obdobným způsobem. Snad mi bude odpuštěno, pokud zde neprovedu důkazy 4, 5; je tomu tak pouze proto, že při jejich vypracování bych se přespříliš zdržel, a k otázce ve vlastním smyslu ani nepatří.

Na základě těchto obecných tvrzení můžeme zadané otázky velmi snadno zodpovědět.

1. Pokud jde o zakřivenou plochu úseče dané koule o nějaké dané výšce. Jelikož koule, a ovšem i její úseč, jsou tělesa utvořená otáčením kolem osy, uplatní se tvrz. 4.

Je tedy zapotřebí nalézt primitivní funkci od $2\pi y[1+y'^2]^{\frac{1}{2}}$. Pro kouli pak platí dobře známá rovnice $y=(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}$, kde *a* označuje průměr koule. A tudíž je y' neboli první derivace *y* vzhledem k *x*;

$$y'=\frac{\frac{a}{2}-x}{(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}a-x}{y};$$

což dosazeno do obecného výrazu pro y' dává následující úpravu

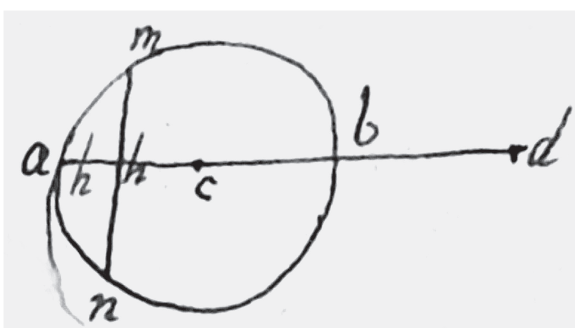
$$2\pi y\left[1+\frac{\left(\frac{1}{2}a-x\right)^2}{y^2}\right]^{\frac{1}{2}}=2\pi\left(y^2+\left(\frac{1}{2}a-x\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nyní je $\frac{1}{2}a-x$ abscisou od středu; zároveň víme, že $y^2+\left(\frac{1}{2}a-x\right)^2=\frac{a^2}{4}$ je rovno kvadrátu poloměru; a tedy je πa tou funkcí, jejíž *fonction primitive relativement à x* je třeba najít.

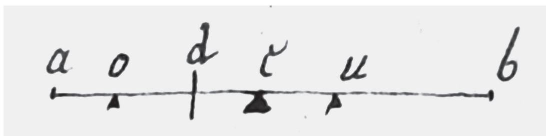
Zjevně jí bude $\pi ax+C$; neboť pro $x=0$ musí tento integrál vymizet; tak dostaneme $C=0$; a tedy $a\pi x$ bude představovat povrch kulové úseče o výšce *x*; daná výška je pak = *h*; a tak dostáváme zakřivenou plochu = $ah\pi$, kde π je kvocient poměru mezi obvodem a průměrem. – Archimédes toto tvrzení vyjadřuje následovně: „zakřivený povrch libovolné kulové úseče se rovná zakřivenému povrchu válce s obsahem podstavy rovným největšímu kruhu koule a výškou rovnou výšce dané úseče".

2. Pokud jde o objem této úseče; pro tento případ využijeme obecného výrazu πy^2. Máme tak *y* vyjádřeno prostřednictvím *x*; totiž $y^2=ax-x^2$. A primitivní funkce od $\pi(ax-x^2)$ je $\pi\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+C$.

Poněvadž tento integrál musí při $x=0$ vymizet, pak máme opět $C=0$. Dosaďme nyní *h* za *x*, čímž získáváme požadovaný objem = $\pi h^2\frac{(3a-2h)}{6}$. Neboli, vyjádřeno geometricky: daná kulová úseč je rovna kouli o povrchu = πh^2, tj. kde poloměr je *h* a výška $\frac{3}{2}a-h$ čili úsečka *hd*, když $bd=bc=ca=\frac{a}{2}$.



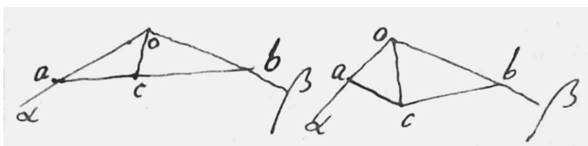
Odpověď na druhou otázku. Důležitou poučku o rovnováze na páce jako první vyslovil Archimédes v knize *De aequiponderantibus*. Forma jeho důkazu doznala přemnohých změn; aniž by se ovšem proměnilo to podstatné. Z toho důvodu pak o Archimédově důkazu vycházejícím z úvahy nad dvěma těžkými rovinami vynáším právě tentýž soud jako o důkazu, kde se tato těžká rovina stočí do válce; anebo o tom, kde se tento válec změní na přímou čáru o bodech, které jsou všechny zatíženy stejnou pravoúhle působící silou, atd. Již Barrow poukázal na chybu v Archimédově důkazu (a tím pádem i ve všech jeho zmíněných transformacích): „Bez dalšího se tu přijímá, že rovnováha na opoře oddělených těžkých úseček *ad, bd* v jejich středech *o, u,* nastávající na základě nejpřísnějšího důkazu pomocí principu dostatečného důvodu, nebude narušena vzájemným spojením obou podpíraných čar v *d.*“ –



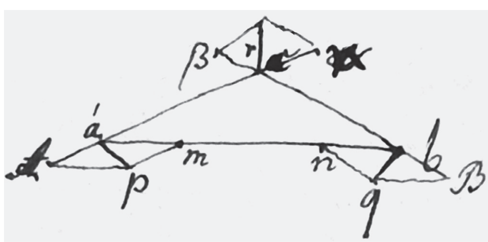
Jakkoli chovám ve značné úctě všechny matematiky, kteří tuto obtíž spolu s Barrowem rozeznali, a pokoušeli se proto o nějaký uspokojivější důkaz (mezi ně patří i Kästner), i tak musím z lásky k pravdě otevřeně přiznat, že já tuto velikou obtíž, která se tu chce spatřovat, rozpoznat nedokáži. Čáry *ad, db,* které s oporami v *o* a *u* jedna vedle druhé leží v jedné jediné přímé linii *ab*, se nacházejí v klidu. Není tu žádná koheze, jež by obě čáry pojila. Poněvadž však spočívají v klidu; vyplývá odtud, že se tu nevyskytuje ani síla usilující o změnu jejich vzájemně protilehlé polohy. „Obě čáry by se nadále měly pokládat za soudržné“ znamená tolik: je třeba v nich uvažovat nějakou vnitřní sílu, která každou sílu směřující ke změně jejich vzájemné polohy vyruší. Ježto pak se tu nevyskytuje žádná taková síla, která by o změnu jejich vzájemné polohy usilovala, ona společná soudržnost znamená, že žádnou takovou sílu nesdílejí; kdo by také mohl pochybovat o tom, že jejich vzájemnou soudržností by se tento klid nějak narušil?

Tím však vůbec nechci tvrdit, že by Archimédes postupoval přísně matematicky; vždyť jakkoli je mi jasné, že tu koheze klid nemůže narušit: stejně tak ovšem vidím, že se přesto nejedná o axiom. Určitá obtíž se jistě také skrývá v tomto závěru: nyní však neudiví, že pouze tato byla zpozorována jako jediná tam, kde se po mém soudu nachází ještě druhá, daleko závažnější; a tu ve svém dokazování nevyzdvihl ani Kästner. A je jí tato: předpokládá se, že „podpěry nesou vždy součet sil, jestliže tyto jsou navzájem rovnoběžné“. Už jen dodatek o „rovnoběžnosti směrů“, který je třeba k této větě připojovat pro zachování její pravdivosti, dostatečně prozrazuje, že se [ne]jedná o větu poslední, u které se již nesmíme tázat po dalších důvodech. Co do zřetelnosti, jak se zdá, za úsudkem na základě koheze značně zaostává; a studentovi by se dalo zrovna tak snadno namluvit, že podpěrný bod nese součet všech sil v každém případě, jako jej přesvědčíme, že tomu tak je v případě rovnoběžnosti směrů. Tímto jsem rovněž poukázal na to, co se mi na Kästnerově jinak bezvadném důkazu ještě zdá pochybeným.

Na docela jiném základu spočívá důkaz Descartův, který jako svrchovaný princip statiky uvažuje toto: že je třeba vynaložit právě tolik síly na pohnutí jednotkového břemena do m-násobné vzdálenosti, jako m-násobného břemena do jednotkové vzdálenosti. – Vůči tomuto důkazu lze namítnout především to, že se zakládá na nesourodé úvaze; neboť se tu pojednává o případu pohybu, [?] má před sebou stav klidu. Mimo to ovšem tento princip ani není způsobilý zastávat úlohu pravého axiomu, a také ze strany mechaniků vesměs za axiom nebyl přijat. – /: Naposled bylo možno na tento důkaz v poněkud pozměněné podobě narazit v Eschenmayerových *Sätze der* [*Natur-*]*Metaphysik* atd. /: Třetí z hlavních způsobů dokazování ~~je~~ tvoří ti, kteří za tímto účelem předpokládají a využívají poučku o skládání sil. Tak činí Newton, Euler. Podle Newtona uvažujeme rovnou či lomenou páku a předpokládáme, že prostřední směr, v němž obě síly tlačí na podpěru, nutně musí vést do bodu *o*, jenž ~~obou sil~~ představuje společný průměr jednotlivých směrů *aabβ* obou sil.



V rovnovážném stavu pak i tento směr musí procházet podpěrou [*o*]. – Pravé axiomy však po mém soudu tato tvrzení obnášet nemohou; zejména proto, že pro určitá rozpoložení sil, např. u rovné páky při rovnoběžných směrech sil, nastává rovnováha, aniž by nějaký takový bod průměru *o* byl vůbec dán. –



K následujícímu důkazu jsem dospěl sám prostřednictvím úvah nad podobnými věcmi; a to ještě předtím, než jsem se dozvěděl, že jej předložil rovněž Euler. Každým 2 koncovým bodům 3 čar pevně daného trojúhelníku *acb* udělíme ve směru těchto čar sobě rovné protichůdné síly. Takto se v každém ze 3 bodů *a*, *b*, *c* setkávají dvě síly, např. *aA*, *am*, které složíme do prostřední *ap*. Poněvadž rovnováhu tvoří všech 6 sil, nastává na základě *ap*, [*b*]*q*, *cr*; a když pak vyjádříme zákon, podle nějž se řídí jejich poměry, nalézáme větu o rovnováze na páce určené body *a, b, c*. – Nejenže tento důkaz využívá pouč. o skládání sil; a tak ~~platí~~ je uplatnitelný jen na případ lomené páky; a aby se dal použít také na přímočarou, pak je nutno – jak to činí La Place ve své *Mechanique coeleste* – velmi nesprávně předpokládat, že přímoč. páka je v místě podpůrného bodu ohnuta či zlomena o nekonečně malý úhel. –

Zvláštní důkaz tohoto tvrzení jsem našel ještě ve Weberově *Naturlehre* (2. nebo 3. svazek); nerozumím mu však dobře na to, abych ho tu mohl posuzovat. – K těmto důkazům vyjmenovaným, nakolik mi jeden po druhém samy od sebe přicházely na mysl: aniž by bylo lze zaručit, zda některý z dalších důležitých důkazů nezůstal stranou, bych konečně připojil svůj vlastní. Nechť p, q jsou dvě síly, jež se ve vzdálenostech x, y udržují navzájem v rovnováze. Zřejmě pak lze jakoukoli z těchto q uvažovat za funkci zbylé p a obou vzdáleností x, y, neboť právě tyto tři úseky q určují. Takto $q = f(p, x, y)$, přičemž předpokládám, že x je vzdálenost připadající p. Jde o to, nalézt rovněž takové podmínky, které tuto funkci určují. – Nyní je především zjevné, že pro libovolné x, y; musí q i p odpadnout. Jestliže tedy dosadíme np za p v $f(p, x, y)$, musí se stát $= nq$. Odtud se pak snadno dokáže, že musí být $f(p, x, y) = p \,.\, \varphi(x, y)$. Tak dostáváme

$$q = p.\varphi(x,y); \text{ neboli } \frac{q}{p} = \varphi(x,y).$$

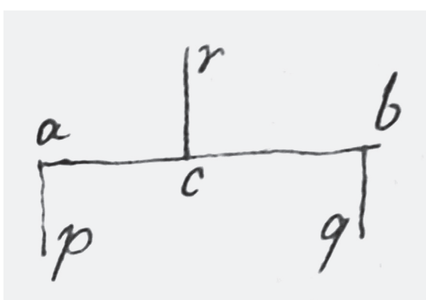
Nyní nechť se p změní v q, x v y a y v x; tak se i q musí proměnit v p; tj.

$$\frac{p}{q} = \varphi(y,x).$$

Odkud

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\varphi(y,x)} \text{ čili } \varphi(x,y) \times \varphi(y,x) = 0.$$

Z této rovnice je možné stanovit $\varphi(x,y)$ do té míry, abychom již s určitostí věděli, že $\varphi(x,y)$ je $= \left(\frac{x}{y}\right)^n$, kde n je neznámou. K jeho určení budu nyní uvažovat střední sílu r, která v těžišti c udržuje rovnováhu sil p, q; vezmeme $ca = x = cb = y$; a máme $q = p\left(\frac{x}{y}\right)^n = p\left(\frac{x}{x}\right)^n = p$; jak je ostatně známo.



Už jen proto, že se také r a p udržují v b ve vzájemné rovnováze; musí dle této formule samotné být

$$r = p\left(\frac{2x}{x}\right)^n = p.\,2^n.$$

Z této rovnice odpadá x. Platí tedy obecně pro libovolnou hodnotu x; položme nyní $x = 0$; pak všechny 3 síly p, q, r připadají do jediného bodu c, a z nauky o ~~rovnoběžníku sil~~ skládání sil pak víme, že musí být $r = 2p = 2q$; a tedy $p\,.\,2^n = 2p$; odkud nutně $n = 1$. Tudíž máme obecnou rovnici

$$q = p.\frac{x}{y};\text{ neboli } q.\,y = p.\,x.$$

<u>Odpověď na třetí otázku.</u> Experiment, na jehož základě se dala vypočítat rychlost vody proudící nějakým úzkým otvorem na základě pozorovaného množství vycházející tekutiny v daném čase a pozorovaného obsahu řezu vodním sloupcem (jenž není totožný s obsahem otvoru, nýbrž je menší), skýtal obecné ponaučení, že za okolností v úloze zmíněných je tato rychlost <u>zřejmě</u> rovna rychlosti, jíž by těleso volně padající z výšky vodního sloupce nad otvorem dosáhlo při svém dopadu, tj. = $\sqrt{[2]gh}$, kde h je onou výškou. – Vzhledem k nicotným znalostem, jež máme o vnitřní povaze tekutých těles, je nepatřičné vyvozovat zákony jejich pohybu na základě teoretických důvodů; proto se zde také nejpřednější ze současných hydrodynamiků, např. Bossut, du Buat ad., uchylují se znamenitými úspěchy do výsostného útočiště zkušenosti. – Pokud jde o uvedenou otázku, teoreticky ji můžeme pojednat ve světle následující ideje. Poněvadž nádobu ve srovnání s otvorem předpokládáme o mnoho větší, pohyb způsobený vytékáním postihne jen onen úzký pruh vody, jenž se nachází kolmo nad otvorem; zbývající vodu pak můžeme uvažovat v klidu. Klesá tak sloupec vody kolmo nad otvorem; a mezera, již zanechává na povrchu vody, se vyplní novou vodou; aniž by, alespoň ne rychle, poklesla hladina sama. Každá částečka vody se tak nachází ve stavu setrvačnosti coby svém volném stavu; spadá (nebo se svaluje) z vodní hladiny, dokud nebude shora přivedena k otvoru pod ní. Uplývající voda jí ustupuje právě tak rychle, jako následuje další. Proto v ústí dosahuje právě takové rychlosti, jaké by z výšky vodního sloupce nad otvorem dosáhlo volně padající těleso.

Seznam použité literatury

ARCHIMÉDÉS. *Archimedis opera omnia. Cum commentariis Eutocii.* I. J. L. Heiberg (ed.). Lipsiae, 1880.

ARCHIMÉDÉS. *Archimedis Opera.* I. I. Barrow (ed.). London, 1675.

BELLEY, P. Infinity, Infinitesimals, and the Reform of Cavalieri: John Wallis and his Critics. In: D. Jesseph – U. Goldenbaum (ed.). *Infinitesimal Differences: Controversies Between Leibniz and His Contemporaries*. Berlin – New York, 2008, s. 31–52.

BENVENUTO, E. *An Introduction to the History of Structural Mechanics: Part Statics and Resistance of Solids*, I. New York, 1991.

BOLZANO, B. *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst: zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt*. Prag, 1817.

BOLZANO, B. *Anti-Euklid*. In: K. Večerka (ed.). *Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky*, Praha, 1967, s. 203–215.

BOLZANO, B. *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*. Prag, 1804.

BOLZANO, B. Miscellanea Mathematica 1+2. In: B. van Rootselaar – A. van der Lugt (ed.). *Bernard Bolzano Gesamtausgabe*. Stuttgart – Bad Cannstatt, 1977.

BOLZANO, B. *Paradoxy nekonečna*. Přel. O. Zich. Praha, 1963.

BOLZANO, B. Ryze analytický důkaz poučky, že mezi dvěma hodnotami, jež poskytují opačně označené výsledky, leží nejméně jeden realný kořen rovnice. Přel. F. Studnička. *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, 11, 1882, č. 1, s. [1a]–38.

BOLZANO, B. *Vlastní životopis*. Přel. M. Pavlíková. Praha, 1981.

BOS, H. J. M. Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, 14, 1974, č. 1, s. 1–90.

ERHARDT, C. Evariste Galois, un candidat à l'Ecole préparatoire en 1829. *Revue d'histoire des mathématiques*, 14, 2008, č. 2, s. 289–328.

FISCHER, J. *Anfangsgründe der reinen Mathematik oder die gemeine und höhere Rechenkunst, Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie*. Jena, 1792.

FOLTA, J. Život a vědecké snahy Bernarda Bolzana. In: V. JARNÍK – J. FOLTA – J. NOVÁK. *Bolzano a základy matematické analýzy*. Praha, 1981, s. 11–30.

FRASER, C. G. The Calculus as Algebraic Analysis: Some Observations on Mathematical Analysis in the 18th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, 39, 1989, č. 4, s. 317–335.

Gesetze und Verordnungen, 1807. Religions-Unterricht an den Universitäten, Lyäen und Gymnasien. In: *Sr. k. k. Majestät Franz des Zweyten politische Gesetze und Verordnungen für die Oesterreichischen, Böhmischen und Galizischen Erbländer*, XXI. Wien, 1807, s. 22–26.

HAUBELT, J. Filosofické koncessy Josefa Steplinga. *Dějiny vědy a techniky*, 4, 1982, s. 207–221.

HERÓN ALEXANDRIJSKÝ. *Les mécaniques, ou, L'élévateur des corps lourds*. B. CARRA DES VEAUX (ed.). Paris, 1988.

HOLBORN, H. *A History of Modern Germany: 1648–1840, I*. Princeton, 1982.

HYKŠOVÁ, M. Bolzano's Inheritance Research in Bohemia. In: E. FUCHS (ed.). *Mathematics throughout the ages. Contributions from the summer school and seminars on the history of mathematics and from the 10th and 11th Novembertagung on the history and philosophy of mathematics, Holbaek, Denmark, October 28–31, 1999, and Brno, the Czech Republic, November 2–5, 2000*. Praha, 2001, s. 67–91.

JANDERA, J. *Beiträge zu einer leichteren und gründlicheren Behandlung einiger Lehren der Arithmetik*. Prag, 1830.

KÄSTNER, A. G. *Anfangsgründe der angewandten Mathematik*. Göttingen, 1759.

KÄSTNER, A. G. *Die mathematischen Anfangsgründe, I–IV*. Göttingen, 1766–1786.

KRAUS, I. František Josef Gerstner. In: *Vědci, vynálezci a podnikatelé v českých zemích*. Praha, 2018, s. 9–45.

LAGRANGE, J.-L. *Lagrange's Theorie der analytischen Funktionen, I–II*. Přel. J. P. Grüsson. Berlin, 1797–1798.

LeCAINE AGNEW, H. *Češi a země Koruny české*. Praha, 2008.

MAKOVSKÝ, J. Entre la nature et l'analyse: essai sur l'histoire de la loi de continuité au XVIIIe siècle. In: Jan MAKOVSKÝ (ed.). *Leibniz et leibnizianismes*. Praha, 2019.

MAKOVSKÝ, J. Pacidius v labyrintu kontinua. In: G. W. Leibniz. *Pacidius Philalethi – Pacidius Philalethovi*. Přel. J. Makovský. Praha, 2019.

MIKULČÁK, J. *Nástin dějin vyučování a (také školy) v českých zemích*. Praha, 2010.

NEWTON, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. London, 1687.

OTAVOVÁ, M. Výuka matematiky na pražské univerzitě v 1. polovině 19. století. In: J. Bečvář – M. Bečvářová (ed.) *31. mezinárodní konference historie matematiky, Poděbrady, 19. až 23. 8. 2016*. Praha, 2016, s. 147–150.

PAPPOS ALEXANDRIJSKÝ. *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt, III*. F Hultch (ed.). Berlin, 1876.

PAVLÍKOVÁ, M. *Bolzanovo působení na pražské univerzitě*. Praha, 1985.

RUSNOCK, P. *Bolzano's Philosophy and the Emergence of Modern Mathematics*. Amsterdam – Atlanta, 2000.

RUSS, S. *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*. Oxford, 2004.

RYBIČKA, A. *Přední křisitelé národa českého. Boje a usilování o právo jazyka českého počátkem přítomného století*. Praha, 1889.

SCHUPPENER, G. – MAČÁK, K. *Stanislav Vydra (1741–1804). Zwischen Elementarmathematik und nationaler Wiedergeburt*. Leipzig, 2004.

STACHEL, P. Das österreichische Bildungssystem zwischen 1749 und 1918. In: K. ACHAM (ed.). *Geschichte der österreichischen Humanwissenschaften, I*. Wien, 1999, s. 115–146.

STAPF, J. *Unterthänigste Vorstellungen an das Land Tyrol, die Errichtung eines Lehrstuhles der praktischen Mathematik an der Universität zu Innsbruck betreffend*. S. l., 1791

ŠEBESTÍK, J. Bolzano's Lehrjahre. In: A. REBOUL (ed.). *Mind, Values, and Metaphysics. Philosophical Essays in Honor of Kevin Mulligan, I.* Cham, 2014, s. 289–293.
ŠEBESTÍK, J. *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano.* Paris, 1992.
ŠEDIVÝ J. a kol. *Antologie matematických didaktických textů. Období 1360–1860.* Praha, 1987.
TOMEK, W. W. *Geschichte der Prager Universität.* Prag, 1849.
TRLIFAJOVÁ, K. (ed.). *Osamělý myslitel Bernard Bolzano.* Praha, 2006.
VARIGNON, P. *Projet d'une mécanique nouvelle.* Paris, 1687.
Verzeichniß, 1785. *Verzeichniß der ordentlichen und ausserordentlichen Vorlesungen, welche an der Universität zu Prag, vom 4 November 1784, bis 7 September 1785 gehalten werden.* Prag, 1785.
Verzeichniß, 1796. *Verzeichniß der ordentlichen und ausserordentlichen Vorlesungen, welche an der Universität zu Prag, vom 16ten Oktober 1795 bis letzten August 1796 gehalten werden.* Praha 1796.
Verzeichniß, 1798. Verzeichniß der ordentlichen und ausserordentlichen Vorlesungen, welche an der Universität zu Prag, vom 17ten Oktober 1797 bis letzten August 1798 gehalten werden, Prag, 1798.
Verzeichniß, 1799. Verzeichniß der ordentlichen und ausserordentlichen Vorlesungen, welche an der Universität zu Prag, vom 17ten Oktober 1798 bis letzten August 1799 gehalten werden. Prag, 1799.
Verzeichniß, 1800. Verzeichniß der ordentlichen und ausserordentlichen Vorlesungen, welche an der Universität zu Prag, vom 18ten Oktober 1799 bis letzten August 1800 gehalten werden. Prag, 1800.
VOPĚNKA, P. *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky.* Praha, 2004.
VYDRA, S. *Gegenstände einer öffentlichen Prüfung aus den mathematischen Vorlesungen.* Prag, 1802.
VYDRA, S. *Sätze aus der Mechanik, die den Herren Hörern der angewandten Mathematik.* Prag, 1795.
WOLFF, Ch. *Vollständiges mathematisches Lexicon.* Leipzig, 1716.
ZENO, F. *Elementa Algebrae, Geometriae ac Trigonometriae cum sectionum conicarum Compendio in usum auditorum*. Praha, 1769.

Summary

The article represents mainly an introduction to the Czech translation of a manuscript containing Bernard Bolzano's examination which he wrote in order to become professor of elementary mathematics at Prague University. This examination took place in October 1804, and consisted of a written and an oral part. Only two candidates took part in it: Bernard Bolzano and Ladislav Jandera. The latter won. The committee asked the candidates three questions: to find the formula of the surface and the volume of a sphere, to find the formula which determines measures the speed of water filling a tank, and to explain the proof of the law of the lever. We analyze Bolzano's answers, especially to the first question, in light of his later reflections on the foundations of mathematics. This document represents an important source to understand both the evolution of Bernard Bolzano's mathematical thought and, more generally, an important source on the practice of teaching in early 19th Century Bohemia. In order to understand it properly, we propose an analysis of archival documents related to the circumstances of the competition as well as a possible explanation of a rather surprising outcome that deeply influenced Bolzano's historical image as well as the way mathematics might have followed.

Author's address:
Filosofický ústav
a Centrum pro teoretická studia
Společné pracoviště UK a AV ČR
Husova 4, 110 00 Praha 1