Algebra v Pacioliho díle Summa (1494)

Luboš Nový

Algebra in Pacioli's work Summa (1494). Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita, published in Venice for the first time, was then probably the first printed compendium of mathematics, and it became an important starting point for the development of mathematics in Italy during the whole 16th century, which is famous exactly for its excellent algebraic discoveries. In the study, we wish to show the real form of Pacioli's algebraic thinking, the sources he was relying on consciously and how it could have been the starting point for the next development.

Keywords*:* Luca Pacioli • Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita • 1494 • algebra • Italy

Úvodem

Následující článek z pozůstalosti RNDr. Luboše Nového, DrSc., zůstal nepublikovaný, ačkoliv jej autor do současné podoby zpracoval již v letech 2007–2008, devět let před svou smrtí. Vzhledem k tomu, že byla práce vybavena poznámkovým aparátem a seznamem literatury, byla přepsána z rukopisu a opravena, lze ji pokládat za dokončenou, i když nemohla projít autorovou finální úpravou při recenzním řízení. Můžeme si položit otázku, proč autor sám tento článek nepředložil do tisku, když publikoval i v dalších letech. Je možné, že se chtěl ještě k tématu vrátit, jak naznačuje poslední věta 1. odstavce, kde odkazuje na „další chystané studie o rozvoji algebry v 16. století". Čtenář by měl přistupovat k tomuto článku i s vědomím složitostí Pacioliho jazyka, tedy jazyka konce 15. století. Studie spadá do oblasti soustavného zájmu Luboše Nového o dějiny algebry a je zajímavým příspěvkem k jejich poznání.

1. Dílo Luky Pacioliho[1] Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita, které vyšlo poprvé[2] v Benátkách, je asi první tištěné kompendium tehdejší

---

[1] Luca Pacioli (asi 1445–1517) používal též jméno Lucas de Burgo. V úvodních partiích díla Summa se též označuje jako Frater Luca de Burgo sancti Sepulchri, Ordinis minorum et sacre Theologie Magistri, in artem Arithmetica et Geometrie …

[2] Druhé vydání Toscolano, 1523, některé části byly asi vydávány zvlášť. Známé je jeho dílo *Divina proportione* (Benátky, 1509) nebo vydání latinského překladu Euklidových Základů (Benátky, 1509).

matematiky. Bylo hojně využíváno ve výuce na různých školách jak samotným autorem, tak i jeho současníky a následovníky. Jak je v historické literatuře často zmiňováno, nepřináší žádné podstatné nové matematické výsledky,[3] přesto však bylo významným východiskem pro rozvoj matematiky v Itálii v celém šestnáctém století, které je proslulé právě skvělými algebraickými objevy. Není úkolem této stati podrobněji prokázat vliv Pacioliho Summy na následující rozvoj matematiky. Ačkoli v 19. a hlavně ve 20. století výrazně postoupilo zpřístupňování nejrůznějších pramenů, které by mohly být důležitou oporou pro analýzu této otázky, přece však jejich studium je zatím málo ucelené a z mnoha důvodů stále málo dokumentuje vztahy mezi jednotlivými prameny a jejich autory. Nám nyní jde o mnohem skromnější úkol. Chceme ukázat skutečnou podobu Pacioliho algebraického myšlení, upozornit na to, o jaké prameny se vědomě opíral a čím tedy mohl být východiskem pro další rozvoj. Mnoho závažných historických otázek, které se nám snad podaří alespoň naznačit, si ponecháváme pro další chystané studie o rozvoji algebry v 16. století.

2. Ve svém životě se Luca Pacioli léta pohyboval mezi zájmem o výtvarné umění a využitím matematického nadání, které ho vesměs živilo. Jak literatura uvádí,[4] narodil se na horním toku Tiberu, v místě zvaném Borgo San Sepulchri. Zde tehdy pobýval též malíř Pietro della Francesco (1410–1492), který měl dobré matematické, a hlavně geometrické znalosti. Stal se také učitelem, který formoval Lucovo vzdělání.[5] V necelých dvaceti letech se Luca Pacioli stal vychovatelem tří synů bohatého

[3] Podstatná většina prací z dějin matematiky (kromě biografií) je vlastně líčení objevů vedoucích k současné matematice, a často jen současným stavem poznání je měří či hodnotí. To však málo vypovídá o skutečném významu a vlivu mnohých prací v jejich době. Autor dobré statě o Paciolim ve významném slovníku Dictionary of Scientific Biography [9, s. 271] v jasném hodnocení Paciolova díla říká: „Pacioli made no original contribution to mathematics; but his Summa, written in the vulgo tongue, provided his countrymen, especially those not schooled in Latin, with an encyclopedia of the existing knowledge of the subject and enabled them to contribute to the advancement of algebra in the sixteenth century“. Výjimečným přínosem pro pochopení a porozumění Pacioliho dílu je rozsáhlá historická práce Cossaliho [4] z konce 18. století, která mj. velmi podrobně analyzuje matematický obsah díla Pacioliho, Cardana, Bombeliho a Vièta, postrádá však širší historický materiál, v té době asi ještě neprostudovaný.

[4] Např. Cantor ([3], s. 306). Cantorovy bohaté údaje a postřehy o Pacioliho díle vesměs neuvádíme, ani nekomentujeme, pokud nejsou třeba pro cíl naší studie či k celkovému porozumění Pacioliho dílu.

[5] Mimo jiné vlivem G. Vassariho se rozhořel spor o tom, že v některých otázkách byl Pacioli plagiátorem Pietra della Francesca. Srov. Vassari [17]. V poznámkách k českému vydání je dostatečně ukázáno, že toto obvinění je značně nadnesené a že sám Pacioli přiznává vliv Pietra della Francesca na jeho výklad. V románové podobě vyslovil Bülunt

benátského kupce Antonia Rompiariho, s nimiž se podílel také na další matematické výuce. Důležité je, že během několikaletého pobytu v Benátkách si osvojil též tehdejší rozsáhlé znalosti tak zvaných kupeckých počtů i jejich využití v kupecké praxi. Po několika letech odešel do Říma, kde se dostal do úzkého kontaktu s Leonem Battistou Albertem. Mezi lety 1470–1477 vstoupil Luca do řádu minoritů, složil příslušnou přísahu a vystudoval teologii. Pak byl řádem vysílán na různá místa jako profesor matematiky.[6] V r. 1497 v Miláně začal spolupracovat s Leonardem da Vinci, který nakreslil i obrázky pro jeho knihu Divina proportione (Benátky, 1509). Oba muži později spolupracovali i za společného pobytu ve Florencii.

V letech 1501–1502 působil Pacioli na univerzitě v Boloni, kde se setkal s jiným profesorem aritmetiky, významným v dějinách algebry, totiž se Scipionem del Ferro.[7] Luca měl asi již v r. 1481 v Perugii dokončenou první verzi svého díla Summa, které bylo později vydáno v Benátkách.

Domněnka, že Pacioli, stejně jako jeho předchůdce Leonardo Pisánský,[8] cestoval po Orientu a studoval tam arabské prameny, je nepodložená, a Luca neuměl arabsky. Znalost algebraických předchůdců získal asi jen z pramenů dostupných v Itálii, a tedy hlavně psaných latinsky a italsky.

3. Ačkoli Luca Pacioli napsal a publikoval několik matematických děl, např. mimo již zmíněnou Divina proportione též opoznámkovaný významný překlad Euklidových Základů (1509), algebraickou tematikou se zabýval jen v Summě. Toto dílo je rozsáhlým kompendiem tehdejší matematiky. Kromě úvodních osmi listů má aritmetická část 224 číslovaných listů a geometrická 76, což je celkem více než 600 stránek foliového formátu hustě psaných, přičemž doplňky či shrnutí částečně využívají i okrajů vedle textu. Aritmetická část, kterou se budeme výhradně zabývat, se dělí na devět různě rozsáhlých oddílů, nazývaných „distinctio“, skládající se mimo úvodu z několika traktátů, a ty opět z „articula“, které mohou obsahovat i větší počet číslovaných částí a příkladů různé složitosti, ale vždy vedoucí na vyžadované

Ataky tvrzení, že Pacioliho dílo Divina proportione je prací Leonarda da Vinci; rozbor tohoto díla by ukázal neudržitelnost tohoto tvrzení. Srov. Bülent ATAKY. *Matematika a Mona Lisa. Umění a věda Leonarda da Vinci*. Praha, 2007.

6 Učil v Perugii, Zadaru, Neapoli, Římě i Milánu. Během doby, kdy učil matematiku, napsal alespoň tři učebnice aritmetiky pro své studenty.

7 Literatura upozorňuje, že Pacioli mohl podnítit Scipionův zájem o řešení kubických rovnic, ale není žádný doklad, že by Pacioliho skepse o možnosti řešit algebraicky kubické rovnice na Scipiona nějak zapůsobila. Srov. třeba ([9], s. 270).

8 Jeho Liber abbaci (1202) čerpala z arabských pramenů, některé znal ze svých cest. Tento rukopis byl vytištěn až v 16. století.

numerické řešení. Ponecháváme v této práci Pacioliho rozdělení (vedle značení Fol. XY r či v), přičemž distinctio překládáme jako oddíl, traktát ponecháváme v jeho znění a artikul překládáme jako paragraf, tedy §.[9]

Vlastní Pacioliho dělení obsahu nám není zcela srozumitelné, což je jen podtrhováno skutečností, že mnohdy necharakterizuje jasně jednotlivé části a nesnaží se je jednoznačně nazvat. Není tomu tak ani u oddílů, což jsou základní části celého díla. Také logická linie díla nemůže uspokojovat dnešního čtenáře, neboť někdy se zdá zařazování částí nebo jednotlivých řešených příkladů značně náhodné, jakoby chtěl překvapit čtenáře svou bravurou vyřešit problém, jak tehdy možná bylo obvyklé. Mnohé partie jsou jakoby cizorodé odbočky jak geometrickými příklady či výklady, tak též praktickými problémy. Složitější se může stát, když při řešení příkladů používá i výklady, které čtenář nalezne podstatně později. To nás však nemůže mást, a tak se pokusíme alespoň naznačit obsah hlavních devíti oddílů s udáním jejich rozsahu.

První oddíl je úvodní a má 19 listů. Je to výklad o charakteru čísel a některých jejich vlastnostech. Je to vlastně opakování toho, co tehdejší čtenář mohl najít v Euklidových Základech[10] anebo spíše v Boetiově Aritmetice;[11] oba tyto své zdroje Pacioli cituje. Dále se ovšem zmiňuje o Aristotelovi a dalších autorech. Aniž by opakoval postupy obou hlavních citovaných vzorů, zabývá se zde rozlišením diskrétních a spojitých veličin, z nichž ho první, bez hlubší analýzy, přímo vede k aritmetice, druhá ke geometrii. Číslo vymezuje podle Euklida jako součet jednotek, tedy čísly jsou mu přirozená čísla bez jednotky, z níž vznikají. Pak se zabývá sudými a lichými čísly, sudosudými, sudolichými atd., či některými dalšími úvahami, které známe z Euklidových aritmetických knih (hlavně sedmé, osmé a deváté). Nevyhýbá se geometrickým výkladům, ale co je podstatné, je výklad převážně aritmetický, takže se domnívám, že vychází spíše z Boetia, kterého často cituje, a spojuje ho s tehdejším počtářstvím. Ovšem brzy přejde ke složitějším problémům, jako je partie o mocninách

9 V úvodních nečíslovaných listech Summy se píše o „Summario de la prima parte principale“, ale neuvádí se jejich přímý vztah k dělení uváděnému v textu. První část obsahuje aritmetiku (v tehdejším pojetí) jako základ praxe. Dovolává se zde některých knih Euklidových Základů („perspicacissimo phylosopho megarense“), dále Severina Boetia a „našich moderních“, mezi nimiž na prvém místě jmenuje Leonarda Pisánského. V dalších třech hlavních částech se věnuje kupeckým počtům a v páté pak je „pratica de geometria“. Na konci dvojstránkového obsahu díla pak je úvod k obsahu prvé hlavní části, obsaženém na dalších sedmi stránkách s vyjmenováním jednotlivých paragrafů.

10 Konkrétně mimo jiné 7. knihu Základů, tedy první ze tří aritmetických knih Euklida. V době publikování Summy jistě Pacioli znal dobře Euklidovy Základy.

11 Boetius [2]; úloha Boetiova ve zprostředkování antické učenosti pro celý středověk je dostatečně známá, zřejmě trvala i přes 15. století.

a odmocninách (již Fol. 2), ovšem s praktickými výpočty čtverců, ploch, trojrozměrných útvarů a jejich stran. Vzory ho sice vedou ke studiu dokonalých čísel atd., ale v podstatě si již zde připravuje půdu k pojmům desáté Euklidovy knihy. Celkem lze říci, že Luca Pacioli zde již u čtenáře předpokládá znalosti počítání a zabývá se většinou tím, co v antice bylo aritmetikou, totiž studiem vlastností čísel a jejich vztahů,[12] ale brzy to „modernizuje“ praktickými aritmetickými příklady. Další, to je druhý oddíl (Fol. 19–47), obsahuje výklad počítání s celými čísly. Jak uvádí v úvodním odstavci, rozlišuje sedm aritmetických operací, tedy v duchu tradice, která se udržela v následujících stoletích.[13] Jmenovitě je to nominace (tedy pojmenování čísel a číslic), sčítání, odčítání, násobení, dělení, vytváření posloupností, odmocňování.[14] Ve svém výkladu dává důraz na praktické příklady a kontrolu správnosti výpočtů.[15] V reálném výpočtu operací s vícecifernými čísly se nevyhýbá počítání jakoby se zápornými čísly. Při násobení uvádí pro operaci (species) různé názvy jako productum, multiplicatio, superficies či rectangulum (Fol. 26), vykládá též různé užívané způsoby násobení čísel atd. Jak jsme již uvedli, za pátou operaci pokládá dělení, přičemž postupuje obvyklým pro něho způsobem, totiž po výkladu, co je to dělení, se věnuje mnoha příkladům a různým postupům a ověřování správnosti výsledků.[16] Partie o posloupnostech obsahuje zejména výpočty součtu konečného počtu prvků různých posloupností, k čemuž uvádí několik příkladů a pravidel. Poté následuje traktát o výpočtu odmocnin,[17] kde se omezuje zejména na odmocninu druhou, tj. „in numeris

---

12 Vychází z přirozených čísel, která jsou mu stále součtem jednotek (podle Euklidovy definice jednotka není číslem). Antická aritmetika nebyla teorií čísel (ačkoli nebyla naukou o výpočtech), i když k ní mohla vést. Klasifikuje čísla podle různých hledisek (jako Euklid). Současně dává příklady typu: Najděme kvadrát, k němuž přičteme 13, a dostaneme opět kvadrát (s. 16, příklad 4).

13 Úvodem se dovolává sv. Augustina a cituje ho, nemluví o „operacích“, ale „de diverse specie e parti de numeri tractato“. Odmítá sem zařadit, na rozdíl od tehdy obvyklého pojetí, duplikaci a půlení, což je, jak říká, násobení a dělení.

14 Zařazení posledních dvou je v té době dosti neobvyklé, neumíme posoudit, zda je však původní. I u numerace uvádí mnoho příkladů, mj. pojmenování jednotlivých míst i u 16místného čísla (Fol. 19r).

15 U odčítání (Fol. 23v) v úvodních slovech zdůrazňuje, že se odčítá jen menší číslo od většího, a tím se stanoví přebytek většího (excesso). Připouští však od čísla odečíst stejné, tedy se samozřejmostí uznává a jmenuje „0“, tj. nulla či çero.

16 Na listu 36v uvádí celkem známou tabulku, jak znázorňovat čísla na prstech. Jen na okraj poznamenávám, že je si vědom, že sčítání je opak odčítání, násobení opak dělení, a výslovně to v textu uvádí i jako prostředek pro kontrolu výpočtů.

17 Druhou odmocninu značí tehdy obvyklým znakem R s přetrženou pravou nožičkou. Třetí odmocninu pak R 3, někdy R cuba. Tuto partii charakterizuje slovy: „extractione de

quadratis“ (§ 2), a pak o jejich přibližných výpočtech, mj. o jejich významu v geometrii. V závěrečné části se věnuje třetím odmocninám, nejen výpočtům, ale i jejich smyslu geometrickému. Dále již nejde (§ 7).

Třetí oddíl (Fol. 47v–52v) vykládá počítání (sčítání, odčítání, násobení a dělení) se zlomky vytvářenými dvěma přirozenými čísly, tedy včetně jedničky. Následující čtvrtý oddíl obsahuje pravidla pro počítání se dvěma čísly, z nichž jedno je přirozené a druhé zlomkem, přičemž se nevyhýbá geometrickému zobrazení (Fol. 53–56r). Po krátkém úvodním výkladu přechází k množství různých praktických příkladů z kupeckých počtů. Tento rychlý přechod od vymezení cíle oddílu, slovní vylíčení vymezené operace k následujícím číselným, abstraktním a praktickým příkladům, to byl typický způsob výkladu skoro v celém dalším díle Luky Pacioliho. Neznal asi jinou možnost výkladu a pokládal ji za srozumitelnou pro čtenáře. Snažil se tím dosáhnout asi i jasnosti a přesnosti.

Opomíjím v těchto partiích otázku užitého jazyka. Nebyl v tehdejší době asi žádný jasný jednoznačně použitelný vzor. Asi byla Pacioliho vzorem tehdejší mluvená latina přecházející v mluvenou italštinu, jak se obvykle soudí, v podobě benátského nářečí. Tento stav byl asi rozhodující a podobný i v dalších tehdejších matematických textech, což v podstatě stěžovalo i vytvářející se zárodek potřebné budoucí terminologie. Proto byl i Pacioliho text plně srozumitelný až ze samotných příkladů. Pátý oddíl (Fol. 57–67v) se zabývá trojčlenkou (la regola del 3.– Fol. 57). Způsob výkladu zůstává stejný. Úvodem oddílu říká „De regula[18] trium rerum qua mediante omnes mercatorie questiones solvuntur“, tedy že se jedná o pravidlo tří věcí, jehož prostřednictvím se řeší všechny kupecké „otázky“. Je-li tomu tak, že se tím řeší všechny otázky, pak vlastně nadřazuje trojčlenku samotnému výkladu řešením problému rovnicemi. Jak již teď můžeme uvést, stejně je to vlastně s úměrami, které jsou mu obecným základem i pro trojčlenky, jak se o tom také zmiňuje. Můžeme se ptát, jaké místo pak mají algebraické rovnice a jejich řešení. Nevystačili bychom úměrami, není rovnice a její řešení jen jednodušším postupem k řešení týchž problémů? Nadto rovnice[19] a jejich řešení můžeme též vyjádřit jasnými a proveditelnými pravidly.

radici … quadrati e cubi“ (Fol. 45v). Je pochopitelné, že se mnohdy spokojuje s přibližným výpočtem, např. (Fol. 46) „De approximatione… R. in surdis“, dále následují výpočty odmocnin ze zlomků, nalezení (inventio) odmocnin geometrickými prostředky atd.

18 Tehdejší význam slova „regula“ je širší než pouhé pravidlo, mínila se tím i metoda řešení, předpis, jehož užitím problém řešíme atd. Někdy Pacioli „regula“ rozděluje pro jasnější pochopení či snadnější provádění na několik jednoduchých kroků, jejichž postupným provedením úkol pro regulu stanovený vyřešíme.

19 Jsme si vědomi, že použití dnešního slova „rovnice“ je jistá modernizace, vkládaná do Pacioliho úvah. On používá, a algebraické práce 16. století také, různé termíny, ale o tom až při zachycení postupu dalších prací.

Stále na téže stránce uvádí již první kupecký příklad. Zjednodušeně řečeno: stojí-li cent jistého zboží 24 dukátů, kolik bude stát 975 centů daného zboží, což bychom označili 100 : 24 = 975 : x. Výsledkem je mu 234 dukátů. Několik věcí stojí za zmínku: zaprvé výsledek ověřuje několika zkouškami a zadruhé volí taková čísla, aby výsledek byl celým číslem.[20] Konečně zatřetí hledaný výsledek nazývá „Cosa", což zase navazuje na představu tehdejší tradice, která v té době mohla mít za sebou i několik století a vedla k terminologii algebraiků čili cosistů. Jak to však bylo s chápáním „neznámé" v této souvislosti? Dále uvádí výpočty různých konkrétních kupeckých problémů, při nichž využívá i týchž čísel. Nejde jen o takové jednoduché příklady, ale i o výpočty zisků a ztrát, kvality např. při míšení vín atd., a uvádí i pravidla při těchto a různých výpočtech.[21] Na posledním listu (Fol. 67r) oddílu uvádí Luca Pacioli seznam používaných zkratek pro kupecké počty (je to „de caratteribus praticis hoc in opere usitatis", tedy praktické značky užívané v tomto díle, o nichž říká „notandum", tedy k zapamatování) a v nich užívá některá znaky z kupeckých počtů, např. duc, což jsou ducati, bl. je benátská měna Bolognino atd, ale také Mcare – multiplikace, Dra je Differentia, v je via, tedy naše krát a tak podobně. V témže odstavci vysvětluje blízké, ale odlišné zkratky: „Idem notandum de caratteribus algebraicis".[22] Algebru zde nazývá „larte magiore: ditta vulgo la regula de la cosa over algebra e almucabala" a zde prý to jsou jen zkratky těchto „caratteri" (abriature over caratteri).[23] Na okraji strany (Fol. 67v) je obsáhlá tabulka výrazů typu R.p.n. numero, což znamená „Za prvé n. znamená numero". Za zmínku zde ovšem stojí upozornit,

---

[20] To je významný rys celé tradice, která byla ve vývoji algebry používaná velmi dlouho; vycházel tento rys jen z didaktických důvodů nebo byl nástrojem tehdejšího myšlení a hledání, vycházejícího převážně z numerických příkladů?

[21] Což někdy označuje „notandum", tedy vhodné k zapamatování.

[22] Historická literatura tuto partii mnoho nezkoumá, nejpodrobnější komentář je asi u Cantora ([3], s. 316–317). Z něho se zdá, že Cantor vidí jedinou souvislost s předcházejícím textem v tom, že Pacioli uvádí pokračování zkratek, ale pak by zůstávalo nevysvětlitelné, proč u těchto zkratek, o nichž mluví poprvé v celém díle, je v tabulce počítání s těmito „carattery" blíže nevysvětleno a v textu více mluví o svých starších aritmetických pracích, konkrétně z let 1470 a 1476, kde poukazuje také na své vzory, z nichž se učil. Z antických jmenuje Pythagora, Nicomacha a Boetia a dovolává se též 2. oddílu, traktátu 3 a paragrafu 9. V tomto paragrafu se jedná o násobení přirozených čísel (Fol. 28), např. 987 krát 987 atd. a na konci paragrafu se zmiňuje o 7., 8. a 9. knize Euklida.

[23] Je obtížné přesně vystihnout v překladu smysl termínu „caratteri", užívaného prakticky v algebře celé 16. století. Snad nejlepší je překládat ho jako „znak"; takto ho v překladu budeme užívat. Tohoto termínu, jak sám Pacioli říká, používal i ve svých výše jmenovaných výkladech aritmetiky.

že R je zde označení pořadí a ne odmocniny, ačkoli v témže sloupci na konci je skupina začínající R a znamená Radici, R R. pak radici de radici, R cu Radici cuba. Tím, že týž znak či termín u Pacioliho může znamenat různé věci či pojmy, se však nemůžeme nechat zmást. Na druhé řádce se píše „R 2 co.cosa", což říká, že za druhé co znamená cosa.[24] Tak pokračuje až k poslednímu řádku této série, totiž „R 30 ro. nono relato", což v tehdejší mluvě znamenalo, že za třicáté je to nono relato, v našem vlastně dvacet devět. To si ovšem vyžaduje bližší vysvětlení. Tehdy označované cosistické caratteri mají toto uspořádání: numero, cosa, censo, cubo, censo di censo (tj. 4) a pak „primo relato", tedy 5. Je tomu tak proto, že vyšší „mocniny" (a stejně odmocniny) se tvořily součiny prvočísel a po prvních dvou prvočíslech bylo nutno zařadit další prvočíslo, jež bylo nazváno „primo relato". Obdobně se postupovalo dále a na uvedeném místě jde Pacioli až k dvaceti devíti, což je deváté prvočíslo, a tedy „nono relato". Ale proto, že na prvé místo bylo zařazeno číslo (numero), vznikla diference a v třicátém řádku dospěla k devátému prvočíslu, tj. jen k dvaceti devíti. Je otázkou, zda tento postup nezabraňoval i rychlejšímu postupu od cosistické symboliky k viètovské.

Následující šestý oddíl obsahuje výklad o úměrnosti a úměrách („de proportionibus et proportionalitatibus") a je proti předcházejícím oddílům podstatně rozsáhlejší, sahá od Fol 67v až po Fol. 98v, zaujímá 31 listů, 62 stránek. Má podobu samostatného pojednání. Tomu již odpovídají úvodní paragrafy. V nich vykládá o dílech autorů, z nichž čerpal. Mezi nimi na prvé místo klade samozřejmě Euklida, z jehož 15 knih (!) pokládá za geometrické knihy 1 až 4, 6, 11–15, v nichž je podán výklad geometrických úměrností, a další čtyři jsou mu převážně aritmetické („de arithmetica principalmente"), totiž 5, 7, 8, 9, 10. Připomíná ovšem též Boetia, který podle něho vykládal Euklida,[25] a jmenuje dále i díla Platonova (např. Timaios, De re publicas)[26]

[24] Obvyklý termín „cosa" nebudeme překládat, o což se mnozí snaží a překládají ho i jako „neznámá". Odmítáme to, abychom se již tady nedopouštěli modernizace, ale budeme s ním zacházet jako s českým slovem a skloňovat ho.

[25] Cantor ([3], s. 317) v této souvislosti poznamenává, že zmínka o Thabitovi může naznačovat, že Pacioli znal Boetiovo vydání Euklida, kde Thabit je v 5. knize vícekrát zmíněn. Novější prameny ukazují, že Pacioli měl k dispozici vydání latinského překladu od Campany z Novary, které ovšem bylo asi z arabského překladu vydaného původně v Benátkách v 15. století.

[26] Zdá se, že zmínka o Platonovi je zde spíše jakési prokazování jeho učenosti a šíře znalostí, nevím, jak slova o zákonech obce vysvětlit věrohodně jinak. V jiných příkladech se zdá, že cituje z druhé ruky, např. „Ameto figlinolo de Josef" což asi byl Ahmed, syn Josefův, arabský autor z 10. století (a autor arabského komentáře k 5. knize Euklidově), citovaný původně Leonardem Pisánským (1202), který znal přímo arabskou vědu. Některé jmenované osoby uvádí i Cantor ([3], s. 317), ačkoli je sám nedešifruje. Uváděný

a řadu dalších autorů. Pacioli se však zmiňuje též o úměrnostech mezi druhými odmocninami, o obvodu a ploše kruhu a jejich vztahu k jeho průměru. Dlouze argumentuje i pro závažnost praktického významu studia úměrností a poměrů a vidí jejich praktický význam i v lékařství,[27] v architektuře (u Vitruvia, Dinocrata, Frontina a Plinia), v teologii, při měření a vážení, i v hudbě (Boetius).[28] Připomíná i malířství zobrazující proporce lidského těla a v této souvislosti jmenuje i „Pietra de li Franceschi". Na tomto základě pak jako jisté zobecnění přejde Pacioli k rozlišení, že spojité veličiny jsou geometrické, a tedy úměra jejich je geometrická, pro nespojité (diskrétní) je aritmetická, a pro hudební harmonická; geometrická je tedy pro úsečky, v tehdejší euklidovské terminologii „linea", nebo poměr plochy či tělesa k jinému tělesu či ploše, z aritmetické je to poměr čísla k číslu,[29] v harmonické poměr zvuku (hlasu – voce) k jinému (stále Fol. 70r). Ovšem celkem hovoří o aritmetických úměrnostech spojitých a nespojitých („continua e discontinua"), ale brzy vyjasní, že v této souvislosti spojitými rozumí spíše ta, která pokračují in infinitum, jako 1. 2. 3. 4. …., mezi nimiž je rozdíl stále stejný a dovršuje to tvrzením, že tak jako je kontinuita a diskontinuita aritmetická, stejně je kontinuita a diskontinuita geometrická.[30] Uvedli jsme tento úryvek z delšího výkladu, abychom poněkud naznačili složitosti, s nimiž Pacioli bojuje při svém výkladu 5. a 6. knihy Euklidovy, o nichž se pak v závěru paragrafu zmiňuje. V následujícím 5. paragrafu (Fol. 70v–71r) studuje, co jsou to veličiny souměřitelné a nesouměřitelné, tedy jde již o východisko 10. knihy Základů.[31] Zde je také zajímavá snaha Pacioliho o zavedení jakýchsi operací s úměrami.[32]

Thomas Beduardin je skoro jistě Thomas de Bradwardin (†1349), též Bredwardin, jehož některé spisy byly vytištěny před vydáním Pacioliho Summy.

27 Zmiňuje se (Fol. 68r) o Avicennovi, Galénovi a Hypokratovi.

28 Vztahy mezi čísly se zabývá Euklid v knihách 6., 7., 8., 9., 10., o tělesech 11., 12., 13., 14., 15., (Fol. 69r).

29 Samozřejmě v pojetí Euklidově, tedy přirozených čísel (bez jednotky), ale uvidíme, že toto pojetí se překračovalo přechodem k racionálním číslům.

30 Doslova je tomu stejně „de la continuita e discontia arithmetica commo de la continuita e discontia geometrica" (Fol. 71r).

31 Obdobně jako v 10. knize Euklida (1. definice) říká, že dvě veličiny jsou souměřitelné, existuje-li společná míra („una communa mesura che luna e laltra aponto equalmente rende"). Jako příklad uvádí 2 a 4 či 8, z nichž 4 je dvojnásobek a 8 čtyřnásobek. Jako příklad nesouměřitelných veličin uvádí stranu čtverce a jeho úhlopříčku. Dále vymezuje souměřitelnost veličin v jejich čtverci. Podotýká také, že geometrická proporce je více abstraktní než aritmetická.

32 Cantor ([3], s. 318) má velmi krátký výklad obsahu a výsledků 6. oddílu. Závěrem říká, že není nutné se jím více zabývat, protože prý „Es sind lauter längst bekannte Dinge, für die Folge erheblich". Přesto soudím, že by stálo za to podrobněji zvážit, čím se výklad

K tomuto cíli zavádí různá rozlišení, snad lze říci typy poměrů, které dokresluje numerickými příklady.

Jak jsme již naznačili dříve, plnému porozumění Paciolovu textu je na obtíž jak mnohdy nejasnost jeho úvah, tak i s tím spojená nepřesná, mnohdy teprve vznikající nová latinsko-italská terminologie. V partiích tohoto šestého oddílu k tomu mj. přispívá i skutečnost, že základ, tvořený hlavně 5. a 6. knihou Euklidových Základů, rozvíjí v převážně aritmetické (číselné) podobě, v níž geometrické pojmy stojí v pozadí. Uvádíme to zde mimo jiné proto, že chceme upozornit na terminologii v třetím traktátu. Název prvního paragrafu např. zní: „Qualiter denominato res proportionum reperiantur", což poněkud volně překládám „Jak nalezneme označení úměrností". Zdůrazňuji překlad slova denominatores,[33] zde to znamená také pojmenování či přímo jmenovatele. Dále ovšem Pacioli říká, že je nutné každou úměru nějak „nominare e baptiçare", tedy pojmenovat a pokřtít. A tato pojmenování vždy najdeme, když dělíme jeden vnější člen druhým.

Později uvádí jako příklady (Fol. 76v) úměru 4 ku 15, což prý je, jako když dělíme čtyři patnácti, a tedy právě 4/15. Od tohoto příkladu jde ke složitějším, totiž k „složeným" úměrám a jejich vyjádřením zlomky, srovnáním velikosti úměr a znovu operacemi s úměrami.[34] V tomto výkladu pokračuje až k traktátu šestému, který nazývá „De septem mirabilibus ex proportionibus inter duas quantitates", tedy o sedmi pozoruhodnostech v úměrách. Jsou-li v tomto paragrafu jen dvě veličiny, v následujícím se zabývá vztahem mezi třemi, pak čtyřmi. Poté náhle skočí a v paragrafu pátém se chce zabývat „De mirabilibus proportionum inter quantitates binomiales", čemuž se věnuje i v následujících paragrafech. Není plně jasné, jak tyto příklady souvisejí s celým výkladem, ale zde v příkladech přejde k úměrám mezi dvojčleny různých typů obecně $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (Fol. 85v–87v), kde se dovolává i jednotlivých vět 10. knihy Euklidových Základů, ukazuje obdivuhodnou obratnost v počítání s těmito binomy, tak důležitými pro tehdejší algebru, a nazývá to „la quele operatione e belissima i pratica de Arithmetica".[35] Při výkladu o spojitých úměrách (stejně jako na mnoha

Pacioliho liší od příslušných částí Euklidových Základů a co přináší nového. To však dalece překračuje cíle této statě. Za zkoumání by též stálo zvážit souvislosti těchto úseků Summy s nejproslulejším dílem Pacioliho De Divina proportione.

[33] S tímto slovem se později setkáváme v algebraických partiích, např. (Fol. 76r).

[34] Tato partie vrcholí (Fol. 82r) rozsáhlou celostránkovou tabulkou různých úměr, včetně iracionálních. Popisuje pak dále rozdíly mezi členy úměry, např. 12 ku 14 je rozdíl 2, nebo násobky členů úměry, např. 6 ku 12 je dvakrát (dupla).

[35] Pro náš budoucí výklad je důležité, že se zde zmiňuje přímo o „la prima quantita binomiale" a dovolává se právě 10. knihy. Ve skutečnosti pracuje s různými dvojčleny vesměs typu $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, kde a, b jsou vždy přirozená čísla. Ani do tohoto místa, ba ani

jiných místech) v § 13. žádá nalezení prostředního členu ke dvěma okrajovým veličinám, tedy v úměře a : x = x : b hledá x, a dochází u příkladu (Fol. 90) mezi 5 a 11 k prostřednímu členu úměry. Je-li to vhodné, používá cosistické symboliky.[36] Naznačíme Pacioliho postup na jednoduchém příkladu (Fol. 91r, příklad 3):[37] „Učiňme z 19 tři části spojité úměrné za předpokladu, že jejich násobek tvoří 216. Pak 216 je kubem druhé části, ovšem kubická odmocnina z 216 je 6. Ostatní dvě spojené jsou 13. Poté 13 rozdělme na dvě části, aby plocha z prvé a druhé činila 36, což je velikost čtverce druhé. Položme první jako 1.co., druhá 13. m 1.co. Vynásobme první druhou, což dělá 13. co. m. 1. ce, což je rovno 36. Pak cose má hodnotu 4 a to je první část. Druhá 9, což je třetí část, vydělená z 19.“ Tento příklad zaujímá v Paciolově textu jen o málo víc než 7 řádků (stránka má obvykle více než 75 řádků). Po tomto následující příklad zaujímá 22 řádků, což vypovídá o složitosti příkladu a jeho řešení, které doprovází i cosistický zápis na okraji. Uvedený příklad jsme se pokusili přeložit do češtiny víceméně doslova, abychom přiblížili i háv Pacioliho uvažování.[38] Cosistický zápis, kterým některé složitější příklady doprovází stručným zápisem podstatných formulí na okraji, nejsou svou formou rovnice, k čemuž by je bylo možno jednoduše doplnit. Vyskytují se zde druhé, třetí a čtvrté odmocniny, „p“ a „m“ pro naše znaky + a -, naznačení závorek pro záznam složitějších výrazů a operací s nimi a cosistické znaky co, ce, cu, což je doplněno výrazy jako je summa pro součet více hodnot, „quadratum Valor quantitatis“ jako závěr a tedy řešení problému,

v dalším výkladu své postupy nevysvětluje, takže pro čtenáře – žáka musela být jeho tvrzení těžko pochopitelná a musela tedy být obdivuhodnou částí matematiky. Tvrzení v textu je (Fol. 86r, § 7).

36 Jako obvykle uvádí Pacioli řadu příkladů obdobných a různě složitých. V tomto případě jsou jich desítky.

37 Pro podtržení charakteru originálu uvedeme zde i doslovné originální znění, pouze v běžných písmenech latinky, zatímco Pacioli používá různých zkratek pro některé slabiky (per) či slova (např. pro quantita). Text pouze s těmito úpravami zní: „Famme de .19. tre parti continue proportionali che multiplicata la prima nella seconda e quello che fa poi multiplicato nella 3ª. facia .216. Questa solverai perla chiave .9ª. Laquel vole che .216. sia el cubo dela seconda parte. Donca fia la .2ª. parte la .R.cuba de .216. che e .6. Laltre doi forom .13. Epro habiando tu la seconda farai positione per laltre che virra faciliter. E dirai che fa di .13. doi parti che la superficie duna i laltra facia .36. cioe quantito el quadrato de la .2ª. porrai la prima .1.co. la seconda .13. m. 1.co Multiplica una i laltra fara .13. co. m. 1. ce. Sira equale a .36. Seqe harai la cosa valere .4. e fo lo prima parte. Laltra fia .9. cioe la .3ª. parte de 19. facta.“

38 Náš překlad sleduje více význam, než aby usiloval být doslovný. Zcela přesný chce být jen tam, kde jsou uvozovky v následujících slovech. Ty potvrzovaly, že Pacioli neuměl arabsky, takže překlad přejímá od jiných autorů.

žádajícího stanovení hledané hodnoty, a běžně p., 2., 3 ., pro za prvé, druhé, třetí. Závěrem celého tohoto oddílu mimo jiné znovu poznamenává, že v těchto příkladech stále vychází z Euklida, zde zejména z 5. knihy Základů.

Další sedmý oddíl Summy (Fol. 98v–111v) uvádí Pacioli slovy, že další praktická část aritmetiky obsahující numerická řešení mnoha různých otázek se děje jistým pravidlem nazývaným „El cataym", což je podle některých učenců arabské slovo.[39] Teprve pak říká, že v naší řeči to znamená pravidlo o dvou mylných předpokladech. Jimi je prý možno řešit skoro všechny otázky (quasi tutte le questioni). Toto pravidlo podávalo řešení problémů, vedoucích v našem pojetí k řešením lineárních rovnic a ryzích rovnic vyšších řádů, u ostatních vedlo jen k přibližným řešením. Někteří historici zapomínají, že s přibližnými řešeními se v kupecké praxi uživatelé většinou spokojovali. Jistou složitost činí Paciolimu některá záporná řešení. Jde-li o rovnice v našem tvaru f(x) = p, kde „p" je přirozené číslo, pak dva mylné předpoklady „a" a „b" mohou vést k číslům f (a) = c f (b) = d, a „c" či „d" může být záporné. Proto se Pacioli snaží najít pro výpočet v těchto případech jistá pravidla. Říká přitom již zde (Fol. 100r), že pro násobení s kladnými a zápornými čísly platí pravidla „ut videbis", čili odkazuje na pozdější výklad a zde se omezuje jen na sčítání a odčítání, což se snaží i geometricky odůvodnit.

Celý tento 7. oddíl obsahuje nejen pravidla, ale i množství příkladů a jejich výpočtů ukazujících praktický význam pravidel o mylných předpokladech.

4. Svému výkladu algebry věnuje Pacioli celý osmý oddíl (Fol. 111v–150r), který je tedy velmi rozsáhlý, bezmála osmdesátistránkový. Úvodem zdůrazňuje, že tato část je vrcholně důležitá pro praxi jak aritmetickou, tak geometrickou.[40] Nazývá ji různě, především je to „Arte magiore", též „La regula de la cosa" a za třetí „Algebra e almucabala" a její „Pratica speculativa". Po těchto označeních v úvodním odstavci vykládá, čím se bude v oddílu zabývat a jak látku rozdělí do sedmi traktátů. V prvém se bude věnovat operacím s čísly kladnými a zápornými,[41] v druhém odmocninám všeho druhu; třetí pak dvojčlenům (binomii) a recisím či rozdílům, a tedy pojetím patnácti úseček z 10. Euklidovy knihy. Ve čtvrtém traktátu chce ukázat, jak se násobí

39 Toto pravidlo je mnohokrát vykládáno v různých historických pracích, srov. Tropfke ([16], s. 367–374), Juškevič ([10], historicky s. 212–215, dále s. 366, 370n) nebo již dříve Cantor ([3], sv. 1, 2).

40 „La parte maxime necessaria a la pratica de arithmetica o anche de geometria." (Fol. 111v).

41 Takto to pochopitelně neříká: „ Nella pria de le quali se dira de li doi termini commodi e tale operare trovati. Detti luno piu e laltro meno…". Zabýval se jimi dosti rozsáhle v prvním paragrafu.

a dělí výrazy s cosy, censi, cubi a relati atd.[42] Teprve v pátém se zabývá postupy algebry a almucabaly a jejich rovnicemi jednoduchými i složitými. Šestý a sedmý traktát jsou pak věnovány řešením početných, převážně praktických otázek pomocí rovnic, což vždy začíná vyjádřením daného problému rovnicí, se kterou pak dále pracuje,[43] tedy kterou upravuje a pak řeší, vše pochopitelně numericky. Načrtnutého obsahu jednotlivých traktátů se Pacioli v následujícím výkladu více méně s malými odchylkami drží.

Z hlediska své doby pokládá Pacioli za nutné podrobně vyložit význam výrazu plus a minus (Fol. 111v–115r). Z jeho slov je zřejmé, že se potýká s nesmírnými potížemi, pravděpodobně pro něho neodstranitelnými rozpory. Hned na začátku v § 1. zdůrazňuje velký praktický význam pojmů plus a minus v algebře a almucabale. Jsou prý nutné pro operace a dodává „maxime infra quantita surde", tedy nejvíce pro iracionální veličiny. Proto je důležitá teorie, jak s nimi pracovat i obecně (pro všechny veličiny). To ovšem říká v době, kdy pojmový základ plynul ze studia Euklidových Základů, kde, jak známo, se za číslo pokládá jen součet jednotek (jednotka nebyla číslem), tedy přirozená čísla bez jednotky. Z nich se vytvářela různá kladná čísla (racionální, atd.) a poměry mezi nimi, vše u Euklida odpovídající geometrickým útvarům, skoro výhradně úsečkám a plochám, omezeně tělesům. Jednalo se vždy o kladné veličiny. Pak minus má smysl jen jako symbol pro odčítání. Ale jak se zdá, toto pojetí se již dlouhou dobu dostávalo do rozporu s tradicí opírající se zejména o kupeckou praxi. I v ní bylo důležité záporné pojetí „dluhu" vůči „majetku", tedy něco záporného vůči kladnému.

Druhý odstavec tohoto traktátu se zabývá počítáním s „těmito termíny", tedy „Plus et minus in pratica", tedy jak opět říká v algebře a almucabale. Jako mimochodem

---

42 „In la quarta mostrarasse certo vie multiplicative: e per consequente divisive nelordi e de la cosa: e censi e cubi e relati etc. Ordinate per modo de libretti vulgarit i acio piu facilmente loperante in suemultiplicationi de cose sorde possi cognoscere quello che una quantita sorda inunaltra multiplicita habia generare. E cosi lo partire una per laltra quello che di tal divisione de debia pervenire: che mediante la notitia del multiplicare sera noto."

43 V textu stručně vyjadřujeme sedm řádků Pacioliho; uvědomuji si, že se již samotným zkrácením dostávám velmi blízko jisté modernizaci Pacioliho úmyslů, čemuž se snažím vyhnout. Ovšem důležité je, že Pacioli zde skutečně píše o vytvoření výrazu vhodného pro rovnici („fabricare qualunche capitolo oportano a su equatione"). Jaký smysl přikládá slovům „capitolo" a „equatione", není zcela jasné. I v následujícím vývoji algebry „capitolo" spíše znamená naši „rovnici" a „equatio" její vyrovnání čili řešení. Podivuhodné je, že zatím s neupřesněnou terminologií směřuje Pacioli asi k představě, že je třeba si vytvořit rovnici (v našem pojetí) a tu pak řešit; zdůrazňujeme ještě, že je to v době, kdy se mohly používat jen velmi slabé zárodky algebraické symboliky.

podotýká, že se jedná o sčítání a odčítání, násobení a dělení a hned udává pravidlo z jiné oblasti: Cosa via,[44] Cosa fa Censo, e censo via Cosa fa Cubo ect. Uvedená slova jsou mu „denominatives" či „caratteri". Násobení uvádí jako opak dělení a naopak.[45] Pak ukazuje, že násobení (nebo dělení) cosa, censo atd. číslem dá zase cosa, censo atd. Tento postup nám může připadat jako samozřejmý a plně srozumitelný, ovšem v Pacioliho době to tak nebylo, protože číslo, tedy „numero", bylo též „denominationes" či „caratteri" jako cosa a ostatní. Musí zde proto vykládat, že i pro sčítání a odčítání je tomu jinak. Uvádí příklady 3 + 4 = 7, ale 3 úsečky a 4 mohou vytvořit plochu, nedají 7, a proto je tomu tak i u příkladu 3 cosa plus 4 censi, kde nedají 7. Je sotva možno se domnívat, že tento výklad byl použit jen z didaktických důvodů.

Na následující stránce Pacioli vykládá čtyři pravidla znaménková a jednotlivá pravidla se snaží na číselných příkladech objasnit a jaksi i zdůvodnit. Jako jeden z příkladů pro násobení uvádí[46] (Fol. 113r) (10 –2) (10 – 2) = 100 – 20 – 20 + 4 = 64 = 8 . 8.

Ačkoli je běžně v aritmetice možné odčítat, jak se zdůrazňuje, jen menší od většího, zde (Fol. 114) tuto zásadu porušuje a uvádí dokonce tři příklady, totiž první jako „p. 4. m. 4 = 0", druhý „p. 16 . m. 4. fa. p. 12." a třetí „p. 4. m. 16. fa. m. 12." Na tomto jeho postupu jsou zvlášť historicky důležité tyto věci. Především je zde jako výsledek uváděna nula, ale zdá se, že to již bylo v tehdejší matematice dosti běžné. Významnější je, že v příkladech se jakoby osamostatňovaly p. 4 a m. 4., tedy kladná a záporná čísla, tedy „p" a „m" nejsou jen symboly pro operaci, a v třetím příkladu je dokonce výsledkem záporné číslo.[47] Tento postup se však odlišuje od pouhých příkladů s odčítáním, tedy v třetím příkladě se jakoby odčítají dvě kladné veličiny, například p. 4. a od toho p. 16, a výsledek je m. 12. V jednom z dalších příkladů se od p. 16. odčítá m. 4. a dostává se jako výsledek p. 20. Z jeho dlouhého výkladu je patrné, že počítání se zápornými a kladnými čísly pokládá za velmi složité i pro čtenáře a vše shrnul dokonce do 12 pravidel (regula).

Následující druhý traktát se zabývá, jak sám říká (Fol. 115), odmocninami. Rozděluje ho do šesti paragrafů. V prvním vykládá pojem odmocnina (radix, R) a říká, že

[44] „Via" znamenalo naše „krát".

[45] Tedy „partendo Censo per Cosa" dá Cosa.

[46] O tomto příkladu srov. Juškevič [10], s. 414.

[47] Zmíněné tři příklady jsou uvedeny na okraji jako doplněk textu. V něm však přímo říká: „Exemplum tertii quando el .m. sia magiot chel piu. Si commo averse agionguere piu .4. noc .m .16. dice che fa .m. 12. perche (opponendo) quel piu .4. riempi .m. 4. e anche restano a rempire .m. 12. Si che .m. 12. E de la natura de la magiore denominatione: lamel i questo lempla diciamo essere .m. 16." Na okraj: v moderní italštině riemire znamená naplnit, vyplnit. O něco dále říká: „Conciosia che .m.16. sia tutto debita e manco che niete."

je jich nekonečně mnoho druhů.[48] V textu pak jmenuje kvadratickou odmocninu, kubickou atd. Druhý paragraf je věnován výpočtu odmocnin,[49] třetí a čtvrtý se zabývá násobením a dělením odmocnin, pátý a šestý pak sčítáním a odčítáním. Právě u těchto dvou naráží na největší obtíže, které částečně překonává geometrickými výklady.

Následující třetí traktát je asi hlavní a rozhodující v celém tomto algebraickém oddílu. Odpovídá tomu i jeho rozsah, sahá od Fol.119v až na začátek Fol.143r, tedy více než 40 stránek. Již v obvyklém úvodním odstavci uvádí, že se v traktátu bude jednat o složité a jemné problémy úvodní pro algebraickou praxi.[50] Bude se jednat též o dvojčlenech (binomi a recisi) a jejich vlastnostech a složení, jak je pojednáno hlavně v 17. a 18. větě 10. knihy Euklidovy. V tomto směru se jasně vyjadřuje v názvu prvního paragrafu: „O 15. přímkách, o nichž se hlavně jedná v 10. knize Euklidově, a o jejich definicích“.[51] To nás vede k zamyšlení o významu a postavení 10. knihy v tehdejších výkladech aritmeticko-algebraické oblasti, za jehož vzor jsme zvolili dílo Luky Pacioliho.[52] Snad není příliš zjednodušeným tvrzením, že pro oživení zájmu o aritmetické a algebraické znalosti již před 15. stoletím,[53] jakkoli praxe zde byla rozhodující a vyžadovala stále složitější matematické znalosti, měli tehdejší počtáři (matematici) málo srozumitelných pramenů, o něž by se z minulosti mohli opřít. Postupně se rozšiřovaly znalosti antické, hlavně řecké matematiky. Kromě Boetia, který byl hlavním zprostředkovatelem mimo jiné i proto, že jeho rukopisy byly latinské, a tedy snadno srozumitelné pro školené učitele, byl na významném místě právě Euklid.[54] Byl základem vědomostí všech učitelů matematiky na tehdejších

[48] Je jich „de molte varie sorti: quasi numero infinite“.

[49] Zde odkazuje na 6. traktát 2. oddílu.

[50] Mimo jiné říká, že pro čtenáře bude vyžadovat mnoho uvažování (intellecto) a „in esso se dira la materia molto sublime: ala pratica algebraica intraductorie“ (Fol. 119v).

[51] „De. 15. lineis de quibus principaliter in decimo Euclidis agitur. El diffinitionibus earum. ar. primus, Tractatis tertius. Di. Octava.“

[52] Základem pro naše zamýšlení je rozsáhlá historická literatura o tomto úseku dějin matematiky. Pro pochopení obsahu a místa 10. knihy v Euklidových Základech jsou velmi podnětné statě v prvním svazku periodického sborníku Istoriko-matematičeskie issledovanija z roku 1948, zejména práce I. G. Bašmakové [1], A. I. Markuševiče [11], A. E. Rajka [15].

[53] Nechceme zde pro nedostatek místa připomínat rozsáhlé prameny či historické práce dokládající tento tehdejší zájem. Jak dlouhý a rozšiřující se zájem ve skutečnosti působil, připomínáme třeba významnou prací Leonarda Pisánského, zvaného též Fibonaci, totiž Liber abbaci, jejíž rukopis, jak jsme již uvedli, vznikl v r. 1202, tedy na přelomu 12. a 13. století, a přinesl nejen výklad kupecké praxe, ale také výsledky arabské (a indické) aritmetiky a podněty arabské algebry.

[54] Připomeňme, že na předním místě latinských rukopisů v západní Evropě byly překlady Euklida z arabských překladů, např. překlad Adelharda z Bathu byl z arabštiny. Ačkoli

univerzitách.[55] Důležité je, že to bylo jediné teoretické matematické východisko pro systematické výklady. Byl zde tedy rozpor, totiž mezi „teoretickými" východisky (Euklid, Boetius) a praktickými potřebami v kupeckých počtech. Tento rozpor byl prohlubován potřebou ucelené výuky, vysvětlující a zdůvodňující postupy, aby žáci nejen pochopili látku, ale též byli přesvědčeni o pravdivosti všech tvrzení, což bylo požadováno na vyšších školách, zejména na univerzitách, a chápáno jako nutný předpoklad pro spolehlivou praxi. Méně důležité to bylo ve vztahu mezi geometrií a zeměměřictvím či měřením objemů, protože tam byl teoretický základ daný a dostatečně známý. Složitější to bylo v aritmeticko-algebraické oblasti. Boetiova aritmetika ovšem čerpala i z pythagorejské tradice, což se projevilo v prvním oddílu celé Pacioliho práce, sloužilo to ovšem málo početní praxi, která nebyla požadována v antické matematice, kde teoretická matematika a početní praxe byly od sebe hluboce odděleny. Při úvahách o Euklidově díle se často hovoří o „aritmetických" knihách Základů, které se někdy vylučovaly z celého díla (hlavně knihy 7, 8, 9, srov. [1]), ale byly skutečně aritmetické v chápání 15. století? Vymezení čísel u Euklida jako našich přirozených čísel (přirozeně bez jednotky) bylo v rozporu s početní praxí, tím více s jakýmkoli přiblížením k uznání záporného výsledku, k rovnocennému uznávání kladných a záporných čísel atd. Ovšem 10. kniha byla jedinou dochovanou a známou antickou teorií iracionálních čísel. Některé historické práce se domnívají, že základem 10. knihy byly studie řeckého matematika Theaiteta, ovšem je možné, že Euklid doplnil a ucelil Theaitetovy výsledky teorie iracionálních čísel částečně jen pro kvadratické a bikvadratické iracionality. Podrobněji a velmi přesně se zabýval těmito otázkami právě Markuševič [11], doplňován Rajkem [15]. Upozorňuji i na to, že dokladů o výsledcích Theaiteta i jeho učitele Theodora z Kyreny je velmi málo, některé jsou známé spíše z pozdější doby prostřednictvím arabských pramenů. Přece však máme náznaky z antických pramenů. Nejznámější je asi krátký úryvek z Platonova dialogu Theaitetos ([14], s. 15).[56] Na tyto náznaky Luca Pacioli pochopitelně nemohl navázat. Vyšel vlastně přímo jen z Euklida a pravděpodobně ze studia Euklida

byly brzy přístupné překlady Euklida z řečtiny, rozšířený překlad z arabštiny od Giovanniho Campana z Novary asi z let 1250–1260 byl vydán v Benátkách v r. 1482 a z něho vycházel i Luca Pacioli ve svém komentovaném vydání Euklida v r. 1509.

55 Euklid byl vykládán i na pražské univerzitě.

56 V tomto dialogu se nachází jen nepatrný náznak. V podstatě se zde říká ([14], s. 15), že obdobně jako u souměřitelnosti přímek a ploch je tomu „co se týče těles". Markuševič ([11], s. 331–332) upozorňuje na komentář Pappuse Alexandrijského k 10. knize Euklida, což je ovšem známo z arabských pramenů, které se zachovaly jen částečně. Na okraj upozorňujeme, že 10. kniha se zabývá iracionalitami, které byly konstruované řeckou metodou, tedy pouze kružítkem a pravítkem, což vlastně platilo jako základní požadavek celých Základů. Tato skutečnost může být i důvodem, proč se Euklid nezabýval třeba

v pracích svých předchůdců v 13.–15. století. Doklady o tom však nemáme. Omezíme se ve stručnosti jen na to, jaké otázky a jak vykládá Pacioli iracionality z 10. knihy Euklidových Základů.

V úvodu k třetímu traktátu osmého oddílu (Fol. 114v) mj. uvádí, že se chce zvlášť zabývat dvojčleny a jejich druhy (specie e sorti) a tak zvanými recisi, ale o těchto pojmech do popředí postavených Paciolim později.

První paragraf třetího traktátu je nazván „De 15. lineis de quibus principaliter in decimo Euclidi sagitur, Et diffinitionibus earum". (O 15 úsečkách, o nichž se hlavně jedná v 10. knize Euklidově a o jejich definicích.) Základní obtíží Pacioliho textu je, že sice mluví o přímkách (linea), jako je tomu u geometrického výkladu Euklida, který vychází z přímek[57] (dá se vždy říci základní přímka a její čtverec, tedy zase základní – srovnej Markuševič [11], s. 332), ale Pacioli hned přechází na čísla a jejich vztahy. Do této podoby chce převést myšlenky Euklidovy a právě k tomu mu chybí výrazové prostředky. Nadto je nemůže zobrazit obecně, ale vždy konkrétním numerickým příkladem. Hovoří proto i o tom, že je třeba si tak představit i matematické věci. Přechází hned zpočátku (ještě Fol. 119v) k tomu, co se říká o „binomii e recisi", což vrhne velké světlo na předmět desáté knihy: co lze poznat, co si „tento filosof" představoval (imagino) o 15 velikostech úseček. Bude se tedy zabývat odmocninami a racionalitou v délce a mocnině (rationale in longo e potentia), ovšem v praktice s čísly, což jsou diskrétní veličiny. Pak vykládá na číselných příkladech Euklidovo pojetí racionality. Není-li náš výklad jasný a srozumitelný sám o sobě, je to mimo jiné dáno i originálem a těžkou srozumitelností Pacioliho textu. Pokus o doslovný překlad by to ještě zatemnil a výklad by nutně musel text modernizovat. Nedovedu si představit, jak tomuto textu rozuměli Pacioliho žáci a čtenáři.

Autor pak brzo přechází (Fol. 120r) k praktickému počítání a ptá se, jak lze sčítat $\sqrt{3}$ a $\sqrt{5}$ atd., což nazývá odmocninou neboli surdo, když příslušné číslo nelze udat, a pak tedy jde o čísla iracionální.

Naznačili jsme, že Pacioli má obtíže s vyložením Euklidových 15 úseček v číselné podobě. Tato snaha o aritmetický výklad složitého Euklidova textu vypadá jasnější v jejich shrnutí na okraji stránky (Fol. 120r). Tam vyjmenovává iracionální úsečky, o nichž se jedná v 10. knize („Lineae irrationalis de quibus agitur in decimo"). Pak podle 41. věty 10. knihy[58] „Tři první druhy, v nichž větší části mocnin jsou menšími

kubickými iracionalitami. Zájem v tomto směru sledovali někteří další řečtí matematici, jejichž díla však k nové době došla jen velmi útržkovitě.

57 U Euklida je, jak známo, jistá terminologická složitost, protože hovoří o přímkách (linea) i tehdy, když myslí „úsečku" v našem slova smyslu.

58 Neidentifikovali jsme tuto větu, nejsou k dispozici překlady Euklida, s nimiž jednoznačně Pacioli pracoval; šlo asi o první vydání překladu Campana z Novary (1482),

ve čtverci úsečky a jím větší v délce“ („Tres prime species in quibus majores portiones potentio res sunt minoribus in quadratis lineae et eiusdem in longitudine coincantium“).

Jsou to[59]

Binomium primum 4. p. R. 7.

Secundum R. 48. p. 6.

Tertium R. 18. p. 6.

Quartum .4. p. R. 10

Quintum R. 13. p. p 3

Sextum R. 24. p. R. 8

A jim odpovídající recise[60] Residuum primum 4. m. R. 7.

Secundum R. 48. m. 6

Tertium .R. 18. m. R.10

Quartum .4. m. R. 6

Quintum .R. 13. m. 3

Sextum .R. 24. m. .R. 8.

Pacioli vystihuje dosti přesně výsledky 10. knihy a v textu se dovolává dalších Euklidových vět. Důležité je, že geometrický výklad Euklidův převádí pro potřeby svého aritmeticko-algebraického díla do tehdejší aritmetické mluvy. Má pochopitelně od Euklida odlišnou terminologii, což mu dělá jisté potíže. Nesnažíme se ani odhadnout, zda a do jaké míry měl Pacioli v tomto snažení své předchůdce, je ale velmi pravděpodobné, že v rukopisech předcházejících století byla řada obdobných snah,[61] nenašli jsme však dost dochovaného materiálu pro srovnání.

ovšem mohl využívat i rukopisné překlady, neboť různé části Summy psal dlouho před případným latinským vydáním. Není to však pro nás důležité.

59 Zdůrazňuji, že nám zde nejde o výklad Euklidovy 10. knihy. Odkazujeme na velmi dobrý výklad jak celé 10. knihy, tak speciálně binomií a recisí v citovaných článcích Rajka [15] a Markuševiče [11], k nimž není třeba nic dodávat. Zvlášť v dnešním pojmosloví o „15 liniích“ je tam výklad z různých hledisek dostatečný. Speciálně Rajk se snaží o postižení Euklidova myšlenkového postupu, pochopitelně s výhradami, v § 2, s. 349–359.

60 „Tres prime species: ad instar trium primarum binomiorum“, tedy tři první druhy odpovídající třem prvním binomům. Uvádíme zde jen úryvek z Pacioliho textu i poznámek na okraji stránek. Domnívám se, že je to dostatečné pro naše cíle a snad i pro názorné vidění jeho výkladu.

61 Upozorňuji na dvě věci: Především geometrický háv 10. knihy nesmí mýlit, i zde jsou prvky vycházející z pythagorovské tradice či přímo z Theaiteta; nyní o tom známe jen náznaky či použití pojmu čísla v Euklidově textu. Za druhé je zvláštní a složitá otázka, proč se Pacioli tak široce zabývá aritmetickým výkladem 10. knihy a tedy teorií iracionalit kvadratických a bikvadratických: hledá tím teoretický základ pro svůj výklad aritmetiky

V dalším textu Pacioli přistupuje ke srovnávání jednotlivých druhů binomů a recisí a k operacím s nimi. Pochopitelně vychází vždy z dobře volených numerických příkladů. Tak třeba žádá (Fol. 121r, § 2.) vynásobit .4. p. R. 7 krát .4. p. R. 7., což činí .16. p. R .112. p. R. 112. p. 7., což upraveno je .23. p. R. 448., tedy jak uzavírá: násobek prvního binomu krát první binom dá zase první binom. Pro potvrzení obdobných pravidel postupně volí mnoho jiných a složitějších příkladů, mj. vedoucích či vycházejících z čtvrté odmocniny, zejména když chce zjistit odmocninu z binomu či recisí.[62] Obdobně jako Euklid se zajímá též o souměřitelnost a nesouměřitelnost (consummensurabilitas) výsledků v jednotlivých případech a asi i pro názornost používá geometrických „důkazů". To ho vede k tomu, že zvažuje geometrickou představu násobení odmocnin. Postupuje např. takto (Fol. 129v): má dvě strany dlouhé R 20. a R 10., plocha je R 200, nebo (Fol. 136r) 6. m. R 20. krát 3. m. R. 720 dá 18. m. R. 180. m. R. 180. p. 100, což celkem činí (che in tutto fanno) 28. m. R. 720., což zobrazuje jako obdélník.[63]

O něco dále (Fol. 131r) v textu má příklad: „R R. 2. via R R. 18. che fara. R R. 36. cioe. R. 6". Obdobných příkladů s vhodně zvolenými čísly má více. Zajímavější je však shrnutí na okraji. Tam říká: dané číslo je .a./ 12., jeho census .b./ 144, census cesus .g./ 20736 atd. Nenechme se však mýlit, nejedná se zde o zlomky a použitá písmena znamenají složitě úsečky, ale snad jde jen o to, že census zde znamená dvojmoc, a census census čtvrtou mocninu, což je důležitá vazba na tehdejší symboliku algebry. Ke konci třetího traktátu se Pacioli pokouší o jakousi „teorii" o trinomech, tedy výrazech se třemi členy. Z jeho výkladu není ani jasné, co tím sleduje,[64] ani nejsou jasné výchozí pojmy. Dospěje až k operacím s mnohočleny,[65] ale vše je procvičováním operací (násobení, dělení, umocňování a odmocňování)

a algebry v dosavadním historickém vývoji a potřebuje ho v tehdejší aritmetice, či je to zbytečná učenost? Upozorňuji, že i další aritmetická a algebraická literatura se zabývá v 15. a 16. století obdobnými problémy 10. knihy, možná však v omezující se míře.

62 Také volí příklady typu (Fol. 123r): 4. p. R. 6. krát 4. m. R. 6 s výsledkem 10. Je to příklad násobení binomu a recisu.

63 Na okraji má chybný údaj, totiž výsledek 28. m. R. 20, v textu správně 28. m. R. 720. Výkladu tohoto příkladu věnuje více než celou stránku (Fol. 130r).

64 Zřejmě jde o snahu rozšířit Euklidovu teorii, ale není jasné, jakým směrem. Nevymezuje trojčleny ani geometricky, jako Euklid dvojčleny, ani nedovede říci, čím se členové trojčlenu liší, neboť vždy snadno provede naznačenou operaci (nebo operace) a převede trojčlen na již známé dvojčleny. Jako jeden z příkladu trojčlenu uvádí (Fol. 141r) R. 500. p. R. 300. m. 20. Převod svých trojčlenů na dvojčleny si uvědomuje a operacemi s nimi to výslovně poznamenává. Připouští též operace dvojčlenů s trojčleny, tedy i násobení.

65 Je to vlastně násobení trojčlenu trojčlenem.

různých typů binomií a recisů, což třeba komplikuje i těmito operacemi s více násobiteli, kde ve výrazech má druhé a třetí odmocniny.[66]

5. Po těchto částech osmého oddílu Summy, zahrnující traktáty jedna až tři, věnuje Luca Pacioli závěrečné dva traktáty vlastnímu řešení algebraických rovnic,[67] totiž traktátu čtvrtému a pátému. Ve srovnání s předcházejícím traktátem není jejich rozsah velký (Fol. 143r–150r), tedy necelých 8 listů, což je 16 stránek. V úvodu říká, že zde navazuje na 1. traktát 5. oddílu a 11. paragrafu, kde již hovořil „de caratteribus praticis "(o praktických znacích) až do 30. stupně (viz výše). Tyto „caratteri algebraici"[68] (mezi něž patří i samo číslo mající znak n) se nemění násobením, totiž nemění se jejich „natura" násobením čísly. K tomu přikládá rozsáhlou tabulku (Fol. 143r+v). Základem její první části je násobení typu:

Za prvé číslo krát číslo dá číslo R. prima n. via n. fa numero.

Za druhé číslo krát 2. cosa dá cosa. R. 2. n. via 2.co fa cosa.

Za třetí číslo krát 4. ce. dá censo. R. 3. n. via 3.ce. fa censo.

Za čtvrté číslo krát 8. cu. dá cubo. R. 4. n. via 8.cu. fa cubo.

Za páté číslo krát 16.ce.ce. dá censo de censo. R. 5. n. via 16.ce.ce.fa censo de censo.

Podle stejného schématu pokračuje až do třicáté řádky, která v originále zní:

R. 30. n. via 736870912. 9 r. fa 9 r. Setkáváme se zde opět s „devato relato", tedy vlastně „nono relato", se kterým jsme se již seznámili v obdobné tabulce dříve. Po této jaksi úvodní tabulce následuje systém patnácti stále se zkracujících sloupcových

[66] Jako obdobu binomií a recisí zavádí právě výrazy s druhými a čtvrtými odmocninami, tj. třeba typu: Prima disjunctio n° .m. RR. 2. + RR. p. numero., 3ª R. p. RR., 4. RR. p. 12., 5. RR. p. RR., a obdobnou recisi jmenuje disjunctio, obdobně mění jen plus na minus. Jakoby hledal cestu od Euklida dále, ale současně nevěděl, kam a proč.

[67] Svým způsobem se jim na mnoha místech předcházejícího textu věnoval již dříve, totiž při řešení některých příkladů, samozřejmě numerických. Ale teprve nyní se pokouší o systematický výklad.

[68] I zde zdůrazňuje praktický význam „algebraických znaků". Stojí za to zvážit, jak Pacioli rozlišuje teoretické a praktické poslání svých matematických výkladů. Jistě je zde určitá společenská nutnost; jinak by posluchači či čtenáři výklady nestudovali. A vědci se skoro vždy cítí nuceni praktický význam svých výkladů zdůrazňovat. Ale asi u Pacioliho šlo ještě o víc, totiž o výklady přebírané z antiky, jak od Boetia (nauka o číslech v jeho pojetí) či přímo složitosti s pochopením a s převedením Euklidových Základů do tehdejší aritmetické mluvy (zejména 10. knihy). Potřebovala to tehdejší praxe? Již zde upozorňujeme na možnost, že tato „teorie" mohla být tehdejší praxi na obtíž, protože bylo ve skutečnosti potřeba (i pro praktické účely) vyvinout novou podobu aritmeticko-algebraické oblasti, což však asi bylo nad síly matematiků konce 15. století. A zvlášť také Pacioliho.

tabulek. Jsou to tabulky pro násobení, abychom to řekli v terminologii Pacioliho, algebraických caratterů. Pro nás se na první pohled může zdát složitým to, že, jak jsme již uvedli, tímto charakterem je i samo číslo. Proto při násobení, o něž v těchto tabulkách jde, se vždy začíná násobením číslem a tím se nemění příslušný caratter. Ukazuje to již první tabulka, o které jsme mluvili výše. Následující tabulka, tedy první ze zmíněných patnácti, podle mého výkladu vlastně říká, že vynásobíme-li jakýkoli caratter prvním (to je číslem) dostaneme tentýž, tedy zkráceně opakuje první. Přejdeme-li k následující, která násobí ostatní caratteri ne již číslem, ale druhým charakterem, což jak víme je cos, ale Pacioli to v tabulkách již neuvádí, dostaneme z druhého caratteru jen třetí caratter, tedy cos krát cos dá censo a nám jakoby se v pořadích jedno ztratilo, v jeho podobě 2. caratter krát 2. caratter dá jen 3. caratter.[69] Tak to postupuje ve všech následujících tabulkách, jak si můžeme snadno představit. Poslední tabulka (sloupec) je krátká. Převedeme-li ji do našeho výkladu, pak 15. caratter krát šestnáctý caratter dá právě třicátý caratter. Tím tyto tabulky končí, ale skrývají se v nich jisté složitosti pro chápání vztahů mezi caratteri, o nichž však budeme mluvit později. Pacioli se nehodlá zabývat všemi 30 caratteri. Jeho text stále v prvním paragrafu na následující stránce (Fol. 144r) tvrdí, že vychází výslovně jen ze tří termínů, totiž z „numero, cosa a censo", což prý vede k „pravidlům o cose", tedy k tomu, co je „Arte Magiore" neboli „pratica speculativa", jinak nazvaná „Algebra e almucabala in lingua arabica", což lze prý přeložit „Restauratio" a „Oppositio".[70] Tím prý můžeme řešit nekonečně otázek a k tomu též potřebujeme binomie a recise různých druhů odmocnin. Je to užitečné v geometrii i v aritmetice. Jeho omezení na tři první caratteri může znamenat, že již zde si jako své omezení (bez udání důvodu) klade řešit jen lineární a kvadratické rovnice v našem pojetí, tedy omezení na jádro arabské algebry.

Později se ještě vrátíme k dešifrování dosavadního úvodu k tomuto traktátu. Osvětlí nám to již následující krátké paragrafy,[71] vysvětlující smysl „caratterů" cosa a censo, totiž § 2 a 3. Znovu opakuje, že cosa je jedna ze tří veličin (quantita), na které se chce omezovat. Vždy, stejně jako censo, musí být spojena s nějakým číslem, tedy musíme nějak poznat tuto quantitu v dané operaci, tedy číslo (neboli snad lépe počet) cosy, a tady se pro ni objevuje i znak R, který tak má mnoho matoucích významů. Avšak „per censo … se intenda el quadrato de ciascuna quantita qual si

[69] Ve trochu volném překladu to zní: „Chci říci, že cosa krát cosa je censo. A také lze říci, že třetí odmocnina krát třetí odmocnina je jako censo krát censo a censo di censo. A tak to máš i s následujícím."

[70] Tento překlad do latiny je pokládán za dostatečně přesný.

[71] Pacioli je nazývá: „Quid pro cosa in algebra intelligatur, ar. secundus" a následující: „Quit pro censum in algebratica operatione intelligatur, ar. tertius" (Fol. 144r, v).

voglia", tedy censem se rozumí quadrát libovolné veličiny. Znova se vrací k významu „cosa". Má pro něj číselný význam, znamená tedy libovolné číslo, je násobené číslem (tedy např. 3 cosa) a znamená v jisté souvislosti jen jedno číslo.[72] Censo chápe podobně, ale vždy je kvadrátem nějakého čísla, tedy přirovnává numero, cosa a censo vždy číslu, s nímž lze provádět aritmetické operace obdobné veličinám spojitým, tedy bodu, přímce a ploše.

Po tomto výkladu základních pojmů přistupuje v paragrafu čtvrtém (Fol. 144v) k samotným algebraickým rovnicím pod názvem „o předurčených rovnostech mezi čísly, věcmi a censy".[73] Vypočítává šest typů, jak bychom řekli, kvadratických rovnic.[74] Pro řešení těchto, jak říká „capitoli", což bylo tehdy běžné pojmenování rovnic, bylo třeba také šesti různých pravidel. Rovnice rozděluje na tři jednoduché (paragraf 5) a tři složité (compositi, paragraf 6). Jako příklad uveďme první jednoduchou: Když se censi (plurál) rovnají cose, pak dělme cose censemi, a co dostaneme, bude číslo,[75] tedy přeneseně počet cos počtem censí. Jako numerický příklad: 5 cos = 20 censí, z čehož plyne, že výsledek je ¼, a to je hodnota cosi (valuta de la cosa).

U složitých rovnic nejprve podává řešení jako výsledek návodu. Tak např. rovnice: censi a cosa se rovnají číslu. Nejprve převedeme rovnici na tvar, abychom měli jen jednu censi. Na to stačí dělení členů rovnice počtem censi. Pak polovinu nových cos násobíme touž polovinou a součin násobíme číslem. Pak z druhé odmocniny tohoto součinu odečteme polovinu cose, a to dá hodnotu hledané cosa.[76] Obdobně podává řešení ostatních rovnic.

---

[72] Jako na mnoha jiných místech i zde jsme se snažili bez modernizace vystihnout smysl Pacioliho slov; nemůžeme však vyloučit, že do své interpretace vkládáme i to, jak jsme pochopili jeho složitý výklad. Neumíme být přesnější, ale to zatím nevadí.

[73] „De equationibus predictorum inter se, s. numeri, rei e census." Upozorňuji, že equatio neznamenalo tehdy rovnici, ale srovnání, vyrovnání, snad rovnost. Stejně najednou místo cosa užije jiného termínu res. Takové nejednotnosti v používání termínů jsou u Pacioliho běžné.

[74] V našem označení jmenuje za prvé $x^2 = x$, za druhé $x^2 = N$, za třetí $x = N$, za čtvrté $x^2 + x = N$, za páté $x + N = x^2$, za šesté $x^2 + N = x$. Pro názornost uvádíme toto poslední v jeho slovech: „Sexto el censo e numero agliarse a cose", tedy vždy termín cosa znamená počet cosa, tedy například naše a x.

[75] „Quando li censi se aguagliano ale cose. Parti la cose per li censi e cello chene vir. a sira numero. E tanto varra la cosa che ponnemo." (Fol. 144v).

[76] Pro možnost kontroly našeho výkladu řešení rovnice uvádíme původní znění (Fol. 144v–145r): „Quando li censi e le cose se aguagliano al numero. Prima se de redure la equatio ne tutta .a. un censo, cioe se cisia manco de .1. ce si debia equalmente redorare esuplire. E se fosse piu de .1. ce. se debia sminuire e a .1. ce. redure che si fara partendo tutta la equatione ne la quantita de li censi. E facto questo se demezza le cose. E luna

Po uvedeném řešení šesti typů kvadratických rovnic se v následujícím paragrafu vrací k zvážení „regularium capitulorum", tj. pravidelných rovnic. Tam na příklad upozorňuje, že v případě, že „le cose se aguaglione a cose" (cosa se rovná cose), pak tato rovnice nedává žádnou hodnotu, řekli bychom řešení, nebo že dvě cosa násobená pěti dá deset cosa atd. V následujícím paragrafu uvádí několik číselných příkladů. To vše je mu základem pro „důkazy" řešení šesti uvedených typů rovnic, pochopitelně geometrickými prostředky, majícími základ v Euklidovi.[77] Ve výkladu zdůrazňuje, co je třeba si zapamatovat (notandum utilissimum). Terminologie stále není ustálená, ale to není podstatné. Snad čtenáři mohli tehdy bez obtíží pochopit Pacioliho výklad a využívat ho pro řešení praktických příkladů.

Šestý traktát (Fol. 147v) znovu otvírá obecnější otázky směřující k dalšímu okruhu problémů, přesahujících kvadratické rovnice. Upozorňuje úvodem, že je nutno vše důkladně poznat a využít odmocniny i jejich dvojčleny (binomy a recise), abychom – snad – mohli postoupit i dále. Dospívá k řadě speciálních konstatování, která nemůžeme všechny diskutovat. Zřejmě mu leží na mysli, jak dospíváme k poznání hodnot (valore) cosa i censu. Naznačuje (Fol. 148r), že se může jednat o hodnoty „kubů" a jakýchkoli jiných „mocnin" (dignita?), ale tato zmínka má rozsah jen jednoho řádku.[78] Mnohem více se zajímá o úpravy – dnes bychom řekli – rovnic. Dovolává se znovu „algebra e almucabala" a podrobněji probírá na příkladu „4. co. p. 6. ce. m. 4. numero", což se rovná „2. co. p. 3. ce . p. 12. numero". Tak přichází k sčítání a odčítání „caratteri" či „denominativ", což je pro něho totéž a začíná tyto termíny používat na přeskáčku. Dospívá konečně k tomu, co bychom nazvali bikvadratickými rovnicemi (paragraf 2, Fol. 148v a následující), a k jejich řešení. Mohli bychom říci k jejich, podle jeho chápání, řešení a řešitelnosti. Své názory shrnuje v jakémsi přehledu[79] osmi typů bikvadratických rovnic, který je vhodný uvést v úplnosti:

---

mita se multiplica in se. E a quel producto se agiongni el numero. E la .R. diquella tal summa meno el dimezamento de le cose fia la valuta de la cosa cerchata etc." Toto pravidlo ještě uvádí na okraji ve verších, které – podle našeho soudu – jsou ještě méně srozumitelné samy o sobě. Tomu, kdo ví, jak se obvykle postupuje, mohou verše snad připomenout požadované kroky.

77 Paragraf 10. zní: „ Demonstratio geometrica equationis primi capituli compositi ", tedy „Geometrický důkaz rovnosti (snad lze říci řešení) první složené rovnice."

78 Blíží se i k úvahám o kladných a záporných číslech. Objevuje se i termín „denominatio", což se kryje s „caratteri", používaným výhradně dříve.

79 V úvodu mluví o nekonečném počtu i bikvadratických rovnic, z nichž vyděluje právě v textu uvedených osm typů. Tak může postupovat proto, že numerických rovnic je pro něho nekonečně a teprve přechod na typy naznačuje či vede (stejně jako u kvadratických) na různé typy. Nezapomeňme, že symbolika, kterou používá, je chudá. Současně

Censo de censo equale a numero.
Censo de censo equale a cosa.
Censo de censo equale a censo.
Imposibile Censo de censo e censo equale a cosa.
Imposibile Censo de censo e cosa equale a censo.
Censo de censo e numero equale a censo.
Censo de censo e censo equale a numero.
Censo de censo equale a numero e censo.

Z návodů k řešení uvedeme nejprve jen příklad pro druhý typ. Požaduje dělit cosa (to je počet cosa) počtem censo de censo a pak provést třetí odmocninu z výsledku tohoto dělení a dostane cosa, čili výsledek.[80] Ovšem u čtvrtého a pátého typu poznamenává Pacioli imposibile. Je otázka, proč? Dle výše uvedeného příkladu v naší dnešní symbolice lze napsat: a. x4x^4 = b. x, z čehož x4 x^4 = b/a.x a dále x3x^3 = b/a, a tedy x = R 3 b/a. Proč nemůže Pacioli obdobně řešit rovnice čtvrtého a pátého typu a proč tyto rovnice označuje slovem imposibile? Je skoro jisté, že si Pacioli uvědomoval, že lze u těchto rovnic snížit stupeň a že oba typy vedou na řešení kubických rovnic a tu uměl (nebo připouštěl) řešit jen pro rovnici typu x 3 = a. Jeho odmítnutí možnosti řešení obecné kubické rovnice mohlo být způsobeno i tím, že iracionality z 10. knihy Euklidových Základů nebyly v té době rozšířeny – podotýkám teoreticky – na potřebné další iracionality a že se chtěl dogmaticky omezovat (nebo neuměl postoupit dále nebo se o to ani nepokoušel) na Euklidem podaný základ, který byl teoretickým vrcholem stále znovu vykládaným. Svazovala ho tedy tradice, která skýtala výchozí základ i vrchol tehdejší učenosti. Ale jak tomu bylo s výpočty třetích, pátých atd. odmocnin? Zde byl asi hlavní svár. Jen na okraj poznamenávám, že Pacioliho odmítnutí řešení obecných kubických rovnic svazovalo podle vlastních Cardanových slov i jeho algebraickou práci, dokud se nedozvěděl o jejich řešení matematiky boloňské školy, což mu umožnilo napsat významné dílo Ars magna (1545). Ale tak vzniká i další historický problém. Mnoho dokladů svědčí o tom, že Luca Pacioli měl možnost setkat se na univerzitě v Boloni s jedním ze zakladatelů boloňské algebraické školy a řešitelem kubických rovnic, ale dozvěděl se v této době něco o práci a výsledcích Scipiona del Ferro?

---

se snaží pro tuto úvahu využívat úměrností, ale pro řešení volí jiné prostředky; jinak asi nemohl.

80 Pro přesnost interpretace uvádím: „Quando li censi di censi sonno equali ale cose se die partir le cose par li censi de censi e. R.cuba de quel che neven varra la cosa. Exemplum trovame un numero chel suo quadrato faccia quanto el numero multiplicato per .8.. Poni chel numero sia .1.co. el suo quadrato fa . 1. ce. E questo ancora in se multiplicato fa .1. ce. ce. E questo fia equale a .1. co. via .8. cioc a .8.co. Parti .8. per .1. neven .8. E .R.cuba de .8. val la cosa e fo el dimandato numero."

V závěrečném paragrafu tohoto traktátu (§ 4, Fol. 149v–150r) uvažuje – zdá se dosti vágně a bezvýsledně – o dalších rovnicích třetího, čtvrtého a pátého stupně, ale již nic nového o nich nedovede říci, než že je jich nekonečně mnoho (tedy numerických) a že jsou možné jejich úpravy. Tím končí devátý oddíl věnovaný algebře.

Pátým a nejdelším oddílem aritmetické části Pacioliho Summy je výklad praktických problémů (Distinctio nona, Fol. 150r–224v), tedy toho, co se poněkud nepřesně nazývá kupeckými počty. Tento oddíl zahrnuje i směnárnictví, půjčování a úroky včetně složených, cenu dopravy, pokuty za pozdní dodání, význam a výpočet podílnictví a z něho plynoucí rozdělování zisků i ztrát atd. Seznamuje i se zvyklostmi v různých zemích a praktickými zkušenostmi. S tím vším se čtenář seznamoval částečně již dříve na praktických příkladech, ale nyní je to soustředěno v systematickém výkladu a hlavně znovu doplněno množstvím příkladů. Podtrhuje tím celkové zaměření díla a také naznačuje i povahu univerzitních a jiných školských výkladů, jimž se Pacioli věnoval. Pro zaměření našeho článku je důležité snad jen konstatování, že předcházející výklad aritmetiky a algebry je zde bohatě využíván. Z praktických problémů jsou na mnoha místech formulovány kvantitativní vztahy vyžadující řešení různými způsoby, tedy dospěje se třeba i k tehdejším rovnicím (capitula) a jejich řešení (equatio). Je tedy patrný určitý posun. Různé typy praktických problémů bývaly (až do 18. století) patřičně nazvány (mj. např. Regula de Tri, Regula Societatis) a bývalo podáno pravidlo, jak je možno je řešit. Zde se Pacioli opírá většinou o předběžné výklady, které jsou jakýmsi teoretickým odůvodněním, ačkoli – jako v dřívějších oddílech – podává pokud možno stručné obecné, dogmaticky k zapamatování formulované postupy, jak problém řešit. Často se setkáváme s výpočtem zisku či ztrát, což nutno formulovat se zápornými čísly a s jejich dělením mezi několik podílníků, jinde zase dospívá k tomu, co bychom řešili systémem lineárních rovnic s více neznámými, ale v těchto případech se vše vede slovně a s minimem jakýchkoli nových algebraických prostředků. Jediné skutečně nové je, jak historická literatura zdůrazňuje, že Pacioli učí, jak vést obchodní korespondenci, jak provádět vyúčtování a dokonce i dvojité účetnictví (dal a má dáti), složité úrokování (úrok z úroku) atd., tedy věci důležité pro obchodní praxi i pro půjčování peněz. Domnívám se, že celý tento závěrečný oddíl by mohl poskytnout mnoho materiálu pro pochopení tehdejšího života, v němž aritmetika a algebra hrály vzrůstající úlohu.

6. Shrnutí

V dosavadním výkladu aritmetické části Pacioliho díla Summa šlo o snahu zachytit, pokud možno přesně i po výrazové stránce, jeho cestu k výkladu tehdejší algebry v Itálii. Z hlediska širšího historického vývoje je místo této jeho práce dáno dvěma směry. Z minulosti jakoby pokračovalo působení jeho nejvýznamnějšího předchůdce, Leonarda Pisánského, který svou Liber abbaci napsal asi roku 1202. Od této práce Pacioliho dělí skoro tři sta let naplněných mimo jiné vývojem evropské kultury včetně aritmetiky i šířením a využíváním algebraických znalostí.[81] Summa byla vydána tiskem (1494, 1523), což umožňovalo její větší a rychlejší rozšíření. Všeobecně se soudí, že ovlivnila další rozvoj algebry, ačkoli nemáme žádný důkaz, že by ovlivnila či podnítila dosažení výsledků italské algebraické školy v 16. století, což byl první podstatný příspěvek k novým algebraickým poznatkům v Evropě.

Summa nebyla Pacioliho prvním výkladem aritmeticko-algebraické problematiky. Ostatní se vesměs nezachovaly a rozhodně nebyly tištěny.[82]

Můžeme předpokládat, že Pacioli znal tehdejší literaturu, samozřejmě vesměs v rukopisné podobě. Dovolává se z antiky hlavně Euklidových Základů, Boetiových spisů, hlavně Aritmetiky, ale u dalších antických autorů asi jen z druhé ruky (např. Pythagora). Je skoro jisté, že neznal Diofantovu Aritmetiku ani přímo, ani od svých vrstevníků,[83] ačkoli jeden exemplář byl ve Vatikánské knihovně. Dále cituje řadu dalších matematiků, vesměs svých starších současníků, z nichž většina zapadla do literárně-historického zapomnění. Jistě dobře znal kupecké počty a tehdejší početní praxi. Ve svém postavení učitele aritmetiky, do níž se tehdy započítávala i algebra, chtěl shrnout tehdejší znalosti v jeden celek a odtud i název díla Summa. Ačkoli často zdůrazňuje praktické využití matematických znalostí, přece jen – i v zájmu ucelení těchto poznatků – chtěl podat i jejich, řekli bychom, teoretický základ, jak se slušelo při univerzitní výuce. Tak vzniká základní rozpor díla, hluboce prostupující i její algebraickou složku.[84] Vedle bohatých znalostí praktické aritmetiky stála celkem úzká přímá znalost antických děl a rozhodně žádná dosavadní snaha či pokusy o teoretické

---

[81] O vývoji aritmeticko-algebraické oblasti v těchto stoletích existuje dobrá a stále se rozšiřující literatura, od které však v našem výkladu o Pacioliho Summě odhlížíme.

[82] Velmi známé a rozšířené dílo Divina proportione (Benátky, 1509), v jejíž první části vychází ze svých matematických znalostí, prý až nadbytečně. Srov. [13]. Jak jsme již výše zmínili, vydal též s poznámkami Euklidovy Základy (Benátky, 1509), což bylo nové vydání překladu Campana z Novary (13. století) z arabštiny.

[83] Peuerbachova výzva k jejímu překladu do latiny byla obsažena jen v dopisu Bianchinimu. Srov. [6].

[84] Zdá se, že tento problém neproniká tak originálními algebraickými pracemi. Algebra jakoby měla vlastní cíle, tj. řešení rovnic, a řešila to tak, že vytyčila požadovaný problém (např. řešení řekli bychom kvadratických rovnic) a ten pak řešila prostředky „algebra i almucabala" k dosažení numerických výsledků nebo čistě geometrickými prostředky (Omar Chajjám– kubické rovnice). Na okraj je třeba poznamenat, že na obecné úrovni islámský svět měl již kolem roku 1000 k dispozici více přístupnou, dnes doložitelnou řeckou, popř. latinskou matematickou literaturu než měl Luca Pacioli koncem 15. století, často v arabských překladech. Zachovala se z toho bohužel jen část.

výklady, dávající podklady pro zdůvodněné a obecné výklady. Aritmetické knihy Euklidových Základů a Boetiova aritmetika tvořily výjimku. Jistě byly důležitým východiskem, ale aby poskytovaly spolehlivé vodítko, bylo by nutné je doplnit. To ovšem bylo nad síly konce 15. století, a možná tím více i Pacioliho. Jestliže literatura konstatuje, že s jeho činností nejsou spojeny žádné matematické objevy, má to možná prosté vysvětlení: nebyl tvůrčím matematikem, byl dobrým učitelem a vykladačem poznatků, které mohl sám získat u druhých.[85] Na druhé straně neměl odvahu, jakou měli jiní tehdejší učitelé praktické aritmetiky, kteří se více méně nestarali o obecné výklady a učili své žáky počítat i složité příklady. Pacioli byl však „profesorem aritmetiky" na tehdejších univerzitách. Proto viděl cíl, dovedl ho formulovat, ale nedovedl ho dosáhnout. Nejjasněji se to projevovalo v jeho zkoumání a výkladu 10. knihy Základů. Pacioli, a dodejme ani jeho vrstevníci a přímí pokračovatelé, nedošli dále.

Celé dílo vyrůstá jakoby ze dvou proudů tehdejší matematiky. Nosná, dopředu se rozvíjející a společensky požadovaná a cenná je praktická aritmetika, která se stává hlavním proudem se širokým zázemím. Na druhé straně stojí pomalu se rozšiřující znalost a studium antické, hlavně řecké matematiky a pomalu osvojované indicko-arabské matematiky. Tato teorie, vysoce ceněná, ale v podstatě nedostatečně známá, pomáhala zatím málo rozvoji praktické složky. Pacioliho Summa čerpá z obou, ale teorie tady jakoby svazuje možnosti hlavního proudu, takže se někdy zdá, že studium teorie je zbytečné, zpomalující rozvoj. Učí však klást si otázky, které zatím neumí řešit a které mnohdy ani neformuloval. To je jedna ze složek patrných na celé Summě, která je přesto základním kamenem dalšího vývoje, jak ovšem můžeme ukázat až v dalších studiích o vývoji algebry v následujícím období.

To, co jsme nyní řekli, neznamená kritiku Pacioliho díla, které se pokusilo vyložit a z hlediska své doby dobře podat Summu aritmeticko-algebraických znalostí. Tím dal jakýsi základ pro celé 16. století, který z různých stran a v různých částech Evropy mohl dále pokračovat a budovat algebru jako řešení algebraických rovnic, a proti této algebře, vlastně až ke konci 16. století, po úsilí celých generací matematiků, teprve François Viète položil základy toho, co bylo nazváno „nová algebra" nebo „nová věda". A právě z tohoto hlediska vidíme význam a historickou úlohu díla Pacioli: vyložil uceleně základ, z něhož v aritmeticko-algebraické oblasti vycházel rozvoj celého 16. století.

[85] Tak tomu ovšem bylo v té době i u jiných rukopisů.

Summary

The study tries to understand and explain the algebraic part of Pacioli's work without mathematical modernization of his knowledge, and thus to come to the perception of his effort in the given period in history as well as its contemporary task. The author concludes that Pacioli tried to combine the contemporary arithmetic-algebraic practice, which he knew very well, and the results of antique authors though he knew those only partially (e. g. he did not know Diofantes' *Arithmetic*); he relied mainly on Euclides' *The Elements* and Boetius' *Arithmetic*. He may have been aware of incompleteness of the theory of irrationalities in the 10th book of *The Elements* but he was not able to overcome them. From there, perhaps his scepticism had passed when it comes to solving cubic equations. Despite these and other weaknesses, Pacioli's summarizing interpretation became one of the important foundations of achievements in algebra of the 16th century, finished by its negation in the "new algebra" of François Viète about 100 years later.

Literatura

[1] I. G. BAŠMAKOVA. Arifmetičeskije knigy „Načal" Evklida. *Istoriko-matematičeskije issledovanija,* 1, 1948, s. 296–328.
[2] Severin BOETIUS. *De instititione arithmetica Libri duo*. G. FRIEDLEIN (ed.). Lipsiae, 1861.
[3] Moritz CANTOR. *Vorlesungen über Geschichte der Matematik. Zweiter Band, von 1200–1668*. Zweite Auflage. Leipzig, 1900.
[4] Pietro CASSALI. *Origine; trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra*. Padua, Vol. I, 1797; Vol. II., 1799.
[5] Maxmilian CURTZE. Die Algebra des Initius ad Ylem Geometrem magister suum. *Abhandlungen zur Geschichte der Matematik,* Heft XIII, 1902, s. 435–609.
[6] Maxmilian CURTZE. Der Briefwechsel Regiomontan's mit Giovanni Bianchini… [z roku 1464]. *Abhandlungen zur Geschichte der Matematik,* Heft XIII, 1902, s. 256.
[7] EUKLID. *Základy*. Přeložil František Servít. Praha, 1907.
[8] *Euclidis elementarum Liber decimus*. Petre MONTAURE interprete. Lutetiae, 1551.
[9] S. A. JAYAWARDENE. Luca Pacioli. In *Dictionary of Scientific Biography, Volume X*. New York, 1974, s. 269–272.
[10] A. P. JUŠKEVIČ. *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha, 1977.
[11] A. I. MARKUŠEVIČ. O klasifikacii irracionalnostej v X. knige „Načal" Evklida. *Istoriko-matematičeskije issledovanija,* Vypusk I, 1948, s. 329–342.
[12] Luca PACIOLI. *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proporcionalita*. Venezia, 1494, Fol. 224 + 76.

[13] Luca PACIOLI. *Divina proportio*. Nach der Venezianische Ausgabe vom Jahre 1509. Herausgegeben, übersetzt und erläutert vom Konstantin Winberg. Wien, 1886.
[14] PLATON. *Theaitetos*. Přeložil František Novotný. Praha, 1933.
[15] A. E. RAJK. Desjataja kniga „Načal" Evklida. *Istoriko-matěmatičeskije issledovanija*, Vypusk I, 1948, s. 343–394.
[16] J. TROPFKE. *Geschichte der Elementarmathematik. Band 4. Aritmetik und Algebra*. 4. Ausgabe. Vollständig neu bearbeitet von Kurt VOGEL, Karin REICH, Helmuth GERIKE. Berlin – New York, 1980.
[17] Giorgio VASSARI. *Životy nejvýznamnějších malířů, sochařů a architektů, 1550*. Život Pietra della Francesca z Borgo San Sepolcro. Sv. I. Praha, 1998, s. 291–296.