ČLÁNEK

Gerbert z Aurillacu a abacistické počtářské umění[1]

Marek Otisk

I.

Do druhé poloviny 10. století se datují doklady o tom, že se v latinské Evropě začal opětovně ve větší míře využívat k početním úkonům abakus, slavná početní tabulka. Obnovení práce s ní na křesťanském Západě je nejčastěji spojováno se jménem Gerberta z Aurillacu, který sepsal několik pojednání na toto téma,[2] i když dnes máme nemalé nesnáze určit, co je vlastně textem samotného Gerberta (v letech 999–1003 byl jakožto Silvestr II. papežem) a co je výtvorem jeho následovníků, žáků či současníků. Však také jeho žáci či jiní uživatelé abaku se sami počali nazývat mimo jiné gerbertisté[3] a lze důvodně předpokládat, že rozšíření teoretické i praktické práce s abakem jde ruku v ruce s Gerbertovým učitelským působením, byť nelze s jistotou říci, co je právě ten aspekt, úkon či doporučení, jež samotný Gerbert v souvislosti s abakem zdůrazňoval nebo preferoval.

Tématem tohoto příspěvku je proto gerbertovský (chceme-li raně-středověký či klášterní) spíše než Gerbertův abakus, byť důležitost pozdějšího papeže pro ozřejmění práce s abakem se zdá být evidentní. Nejprve se pozornost zaměří na to, co je pro práci na abaku nezbytné – popis abaku a jeho struktury včetně základních znalostí, kterými musel abacista disponovat; hlavní část příspěvku by pak měla ukázat, jakým způsobem se na abaku počítá, a poodhalit možná až nečekaně velkou míru shodnosti abacistického počtářského umění s dnes obvyklým způsobem počítání. Stranou zájmu v této souvislosti rovněž nemůže zůstat rozšíření tzv. arabských číslic v latinském kulturním prostředí.

1 Studie vznikla v rámci grantového projektu GAČR č. 401/08/0053.

2 Nejen matematické dílo Gerbertovo vydal N. Bubnov – viz N. BUBNOV (ed.): *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica (972–1003)*. Berlin, R. Friedländer & Sohn 1899 (repr. Hildesheim, Georg Olms 1963).

3 N. Bubnov ve své práci o Gerbertově matematickém díle uvádí dva rukopisy (jeden z 11. a druhý z 12. století), v nichž se vyskytuje termín *girbercista* – viz *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 291: „*Dic tu, girbercista, quot porci impares sive de XXX sive de CCC in tres dies occidendi sunt*."

II.

Již abacisté[4] konce raného středověku a rovněž pozdější matematikové, kteří využívali tuto praktickou početní pomůcku, se mnohdy dovolávali Gerbertova jména, neboť tento vzdělanec byl nejčastěji zmiňovanou autoritou, jež stála na počátku opětovného užívání abaku v latinské Evropě.[5] Gerbert však v poslední čtvrtině 10. století nebyl jediným učitelem, který ohromoval své okolí nebývalými matematickými dovednostmi. Z jeho současníků nelze zapomínat na Abbona z Fleury (kol. 945–1004)[6] či Herigera z Lobbes (před 950–1007).[7] Vedle řady anonymních textů,[8] včetně slavné Pseudo-Boethiovy *Geometrie*,[9] může být mezi další abacisty počítán Gerbertův ná-

---

4 Viz např. Willelmus Malmesburiensis: De gestis regum anglorum libri quinque II, 167. In: *Patrologiae cursus completus. Series latina* (dále jen *PL*) *179*, c. 1138B–1139A: „*Abacum certe primus a Saracenis rapiens, regulas dedit quae a sudantibus abacistis vix intelliguntur*."

5 Viz např. Radulphus Laudunensis: Tractatus de abaco. In: *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 389: „*Sed quum ea, de qua sermo est, disciplina apud omnes ferme occidentalium partium incolas oblivioni tradita est, contingit et hanc calculandi disciplinam, utpote cujus fructus cessante arte, ad cujus adminiculum reperta fuerat, non adeo magnus advertebatur, in contemptum venisse, nisi quantum a summae prudentiae viro Gerberto, cui Sapientis cognomen fuit, atque ab eximio doctore Hermanno eorumque discipulis usque ad nostra tempora derivata a fontibus illorum, modica licet, praedictae scientiae vena manavit*." Podobně také Chronici s. Andrae Castri Cameracensis. In: *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 389–390: „*Inde Gerbertus, qui et Silvester, quem supra memoravimus, substituitur. … Rexit igitur ecclesiam annis 4, mense 1, diebus 19, et mortem sibi vicinam sentiens hoc versu se ipsu compellasse fertur: ‚Nil abacus mathesisque tibi, Gerberte, juvabunt*.'" Později pak např. Trithemius: Annales Hirsaugiensis. In: *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 392: „*Claruit his temporibus Gerbertus ordinis nostri coenobii Floriacensis, vir in Mathematica, Astronomia, Philosophia, Arithmetica ceterarumque pene omnium scientiarum doctrina eruditissimus, qui multos discipulos nobilissimos reliquit, inter quos fertur etiam Otto imperator fuisse non ultimus*." A řada dalších.

6 Studoval ve Fleury, Paříži i Remeši, vyučoval ve Fleury i v anglickém klášteře Ramsey (patrně 986–988), poté vedl školu ve Fleury a stal se tamním opatem. O abaku hovoří především ve svém díle *In calculum Victorii commentario* (Abbo of Fleury and Ramsey: *Commentary on the Calculus of Victorius of Aquitaine*). A. M. PEDEN (ed.). Oxford, Oxford University Press 2003) a zmiňuje se o něm i v *Quaestiones grammaticales* (Abbon de Fleury: *Questions grammaticales*. A. GUERREAU-JALABERT (ed.). Paris, Société d'Édition 1982).

7 Studoval na katedrální škole v Lutychu, poté vedl školu v klášteře Lobbes, kde byl později také opatem (990–1007). Je autorem abacistického pojednání *Regulae de numerorum abaci rationibus* (viz *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 205–225).

8 Viz např. *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 225–244.

9 Pro abakus klíčové pasáže nabízí *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 155–196.

sledovník Bernelius z Paříže[10] či někteří adresáti Gerbertových listů – zvláště Konstantin z Fleury (zemřel po 1016)[11] a Adalbero (či Ascelinus) z Laonu (zemřel 1030/31).[12] Na Abbonovo působení v Ramsey na Britských ostrovech navázal především Byrhtferth z Ramsey (cca 970–1020).[13] V Porýní abakus znal Walter ze Špýru (asi 963–1027),[14] v Reichenau šířil slávu nejen abaku Hermannus Contractus (1013–1054).[15] V Lutychu byl abakus užíván

10 O osobě tohoto matematika je velmi málo známo – patrně svou *Knihu o abaku* (Bernelius Parisiensis: Liber abaci. In: A. OLLERIS (ed.): *Œuvres de Gerbert, pape sous le nom de Sylvestre II.* Clermont-Ferrand – Paris, Thibaut – Dumoulin 1867, s. 357–400) sepsal na počátku 11. století, neboť v ní hovoří o papeži Gerbertovi; Bernelius Parisiensis: Liber abaci, s. 357: „…*a domino papa Gerberto*…“

11 Velmi blízký Gerbertův žák, adresát řady Gerbertových listů, vesměs s tematikou quadrivia, včetně abacistických pojednání Gerberta. Viz např. Gerbertus: Epistola 2–7, s. 36–47 (s. 479–480; Appendix iii, s. 238–239). Konstantin byl mnichem a později učitelem ve Fleury, následně pak opatem v klášteře Micy. Číslování Gerbertových listů uvádím v tomto textu podle novějšího vydání překladu Gerbertovy korespondence *The Letters of Gerbert with his papal privileges as Sylvester II.* H. P. Lattin (tr.). New York, Columbia University Press 1961; v závorce pak odkazuji arabskou číslicí na číslování ve vydání A. OLLERIS (ed.): *Œuvres de Gerbert, pape sous le nom de Sylvestre II*. Clermont-Ferrand – Paris, Thibaut – Dumoulin 1867; římskou číslicí následně na řazení v J. HAVET (ed.): *Lettres de Gerbert (983–997), publiées avec une introduction et des notes*. Paris, Picard 1889. Z listů Konstantinovi však Olleris publikoval bez číslování pouze *Ep.* 2 a Havet – rovněž bez číslování – pouze *Ep.* 7, oba tak navíc učinili v přílohách, proto zde navíc odkazuji na *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 6–7, 23–35.

12 Studoval v Remeši pod Gerbertovým vedením, působil v Métách a od roku 977 (s výjimkou svého sesazení a věznění) byl biskupem v Laonu. Psal básně a zmiňuje v nich rovněž matematická studia u Gerberta. Viz Adalbero Laudunensis: Carmen ad Rotbertum regem Francium. In: *PL* 141, s. 777.

13 Mnich kláštera v Ramsey je autorem několika vlivných matematických, historických a hagiografických prací – viz např. Bridfertus Ramesiensis: De loquela per gestum digitorum et temporum ratione libellus. In: *PL* 90, c. 685–698; příp. P. S. BAKER – M. LAPIDGE (eds.): *Byrhtferth's Enchiridion*. Oxford, Oxford University Press 1995.

14 Studoval ve Špýru, tamější škola byla pod vlivem klášterní školy svatého Havla, patrně byl ve styku i s Gerbertem, neboť krátce po roce 1000 byl kaplanem císaře Otty III., poté se stal biskupem ve Špýru. Abakus popisuje v díle *Vita S. Christophori* (viz *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 204).

15 Takřka celý svůj život spojil s klášterem v Reichenau. Patří mezi nejvěhlasnější vzdělance své doby – především se angažoval v uměních quadrivia, je znám rovněž jako skladatel hudby. Jeho abakus viz – Hermannus Contractus: Qualiter multiplicationes fiant in abaco. P. TREUTLEIN (ed.). *Bolletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, 10, 1877*, s. 643–647.

patrně již biskupem Wazonem (zemřel asi 1048)[16] a následně Garlandem Compotistou (zemřel na poč. 12. století),[17] v Laonu pak zejména Radulfem z Laonu (zemřel 1131/4)[18] a Adelardem z Bathu (cca 1080–cca 1160),[19] jehož předchůdci za Lamanšským průlivem byli Turchill Compotista (počátek 12. století?),[20] jím zmiňovaný učitel Vilém R.,[21] či opět na Lutych napojený Robert z Herefordu (před 1050–1095).[22] Vedle dalších center (snad i Cluny[23]) je zřejmé, že lotrinské školy měly na šíření znalostí o abaku hlavní

16 Biskupem byl v letech 1041/42–1048, dříve studoval u Herigera z Lobbes, mohl být v kontaktu i s Gerbertem. Srov. Anselmus Leodiensis: Gesta episcoporum Tungrensium, Trajectensium, et Leodiensium II, 30. In: *PL* 139, c. 1094C–1095A.

17 Řadou pochybností opředena osobnost – obtížně se hledá jeho identita. Rukopisy dokládají, že žil v 11. století, pocházel patrně z Lotrinska, působil v Lutychu, několik let strávil v Anglii a snad vedl i školu v Besançon. Na jeho text o abaku viz – Garlandus Compotista: De abaco. P. TREUTLEIN (ed.). *Bolletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, 10, 1877*, s. 595–607.

18 Bratr žáka Anselma z Canterbury a učitele Petra Abaelarda Anselma z Laonu, oba sourozenci se podíleli na věhlasu laonské školy na konci 11. a na počátku 12. století. Patrně po bratrově smrti (1117) se stal arcijáhenem v Laonu. Jeho abakus viz – Radulphus Laudunensis: Liber de abaco. A. NAGL (ed.). *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, 5, 1890*, s. 85–133.

19 Studoval v Tours, procestoval Španělsko, Itálii, Řecko, severní Afriku i malou Asii, vyučoval v Laonu, kde sepsal své abacistické pojednání *Regule abaci* (Adelardus Bathoniensis: Regule abaci. B. BONCOMPAGNI (ed.). *Bolletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, 14, 1881*, s. 1–134), aby se nakonec usadil v Bathu. Je znám nejen jako autor vlastních spisů o svobodných uměních, ale také jako překladatel a zprostředkovatel arabsko-řecké vzdělanosti na latinský Západ.

20 Je dnes nesnadné blíže identifikovat tohoto matematika. Zdá se, že byl činný v první polovině (či na počátku) 12. století. Jeho abakus oplývá řadou konkrétních úkolů – viz Turchillus Compotista: Reguncule super abacum. E. NARDUCCI (ed.). *Bolletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, 15, 1882*, s. 111–163.

21 O Vilémovi viz např. – Turchillus Compotista: Reguncule super abacum, s. 150: „*…non ab antiquis sed a predicto Guillelmo R validissimo calculatore*." Turchill zde zmiňuje rovněž dalšího Vilémova žáka-matematika-abacistu Simona – viz ibid., s. 135.

22 Působil v Lutychu, kde studoval rovněž matematiku, ovšem poté zavítal na britské ostrovy, kde byl roku 1079 vysvěcen na biskupa v Herefordu. Aktivně se účastnil investiturních diskusí mezi Anselmem z Canterbury a králem Vilémem II. Jako předního matematika, který se aktivně věnoval abaku, ho představuje Vilém z Malmesbury – viz Willelmus Malmesburiensis: De gestis pontificum anglorum libri quinque IV. In: *PL* 179, c. 1600A: „*Non multo post accepit sedem illam Robertus Lotharingus, qui ibi ecclesiam tereti aedificavit schemate, Aquensem basilicam pro modio imitatus suo: omnium liberalium artium peritissimus, abacum praecipue, et lunarem compotum et coelestium astrorum cursum rimatus.*"

23 Je otázkou kdo, kde a kdy sepsal tzv. *Regulae super abacum*, jejichž autorství bylo omylem připisováno Odovi z Cluny (cca 879–cca 942), od roku 924 clunyjského opata,

zásluhu a jistě není náhodou, že učenecký věhlas tohoto regionu dokonce předchází působení Gerberta z Aurillacu.[24]

III.

Richer z Remeše, souputník, patrně žák a životopisec Gerberta, věnoval část třetí knihy svého kronikářského díla *Historiarum libri quatuor* popisu početní tabulky svého učitele: Abakus v Gerbertově verzi podle Richera vznikl za pomoci výrobce štítů[25] a byl rozdělen do sedmadvaceti sloupců,[26]

dříve učitele v Tours. Text tohoto pojednání viz Anonymus: Regulae Domni Odonis super abacum (Opuscula de musica). In: *PL* 133, c. 807–814.

24 Na možný klíčový podíl lotrinského prostředí na šíření vědeckých znalostí již těsně po polovině 10. století (např. diplomatické styky córdobského chalífátu s císařem Ottou I.) upozornil již dříve J. W. Thomson – viz J. W. THOMSON: The Introduction of Arabic Science into Lorraine in the Tenth Century. In: *Isis 12, 1929, č. 2*, s. 184–193. Významnou roli při šíření některých (nejen) matematických znalostí mohl hrát Jan z Gorze (cca 900–974), který procestoval např. jižní Itálii, kde se setkal s řeckými mnichy, což jej natolik oslovilo, že z Gorze šířil vůči Cluny alternativní reformně-církevní proud (mnichem byl od roku 933, od roku 960 opatem toho kláštera). V roce 953 ve službách Otty I. navštívil Barcelonu, Tortosu, Zaragozu a Córdobu, patrně se setkal s tamními křesťany i Židy, snad se seznámil (s jejich pomocí či s pomocí Žida Chasdaje ben Šapruta, córdobského diplomata, filosofa a překladatele) i s arabskou vědou a filosofií (viz např. Nadia AMBROSETTI: *L'ereditá arabo-islamica nelle science e nelle arti del calcolo dell'Europa medievale*. Milano, LED edizioni 2008, s. 103–104). Referuje o tom jeho životopis a lze předpokládat jeho vliv na rozšíření těchto znalostí po lotrinských školách – viz Joannes S. Arnufi Metensis: Vita Joannis abbatis Gorziensis 115–130. In: *PL* 137, c. 298B–308A: „*…Legatio regis Hispaniae Abderahamenis, fama gloriae insigniumque factorum in gentes diversas tunc jam magni regis, postmodum vero Caesaris augusti, domni Ottonis perciti, forte cum muneribus pro regia munificentia missis advenerat. … Et primo quidem Judeum quendam, cui nomen Hasdeu, quo neminem umquam prudentiorem se vidisse aut audisse nostri testati sunt, ad eos misit, qui de omnibus ab eis ipsis penitus exploraret. … Tandem extitit inter palatina offitia Recemundus quidam, adprime catholicus, et litteris optime tam nostrorum quam ipsius inter quos versabatur linguae Arabicae institutus…*"

25 Richerus Remensis: Historiarum libri quatuor III, 54. In: *PL* 139, c. 104A: „*In geometria vero non minor in docendo labor expensus est. Cujus introductioni, abacum id est tabulam dimensionibus aptam opere scutarii effecit.*"

26 Podobně např. Commentarii in Gerberti regulas de numerorum abaci rationibus. In: *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 248–249. Naopak Bernelius z Paříže hovoří o třiceti sloupcích – Bernelius Parisiensis: Liber abaci, s. 359: „*Tabula, ut prætaxatum est, diligenter undique prius polita, per xxx dividatur lineas, quarum tres primas unciarum minutiarumque dispositioni reservamus, reliquarum vero xxvii, per ternas in ternas, haec certa mensurandi proveniat regula:…*" Jinde se zase hovoří o menších počtech, přičemž první tři sloupce zprava jsou vždy vyhrazeny pro počítání se zlomky, jak uvádí i Bernelius.

do nichž se umisťovalo devět symbolů čísel, s jejichž pomocí bylo možno zaznamenat veškerá čísla.[27]

Raně středověký, gerbertovský či Gerbertův abakus je tedy dělen do sedmadvaceti sloupců. Počet sloupců je vždy dělitelný třemi, neboť takto lze přehledně zaznamenávat řádově jednotky až stovky; tisíce až statisíce atd. Tradičně, jak dokládají dobově dochované verze abaků,[28] jsou právě tyto trojice sloupců ukončeny obloukem. Jelikož se vynález počtářského umění připisoval Pythagorovi[29] – odtud již Boethiem uváděný název abaku *mensa pytagorica* –,[30] je rovněž tento spojující oblouk nazván Pythagorovým obloukem (*arcus Pythagorei*). V rámci oblouku jsou pak jednotlivé sloupce vždy značeny písmeny – zdá se, že se střídavě a záměnně užívalo označení *C – D – M* (zkratky pro označení řádu – *centum*, sto, tedy stovky, *decem*, deset, desítky, a *monas*, z řeckého jednotka, tedy jednotky) a *C – X – I* (tj. římské číslice pro stovku, desítku a jedničku), příp. se ještě místo *I* používalo

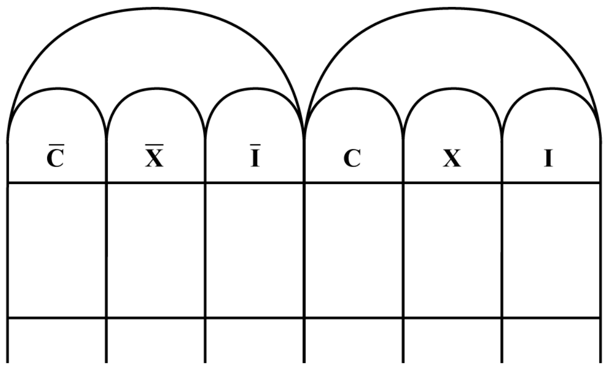
[27] Richerus Remensis: Historiarum libri quatuor III, 54, c. 105A: „*Cujus longitudini, in 27 partibus diductae, novem numero notas omnem numerum significantes disposuit.*"

[28] Viz např. abakus z tzv. Boethiovy *Geometrie II*, na detaily o díle, včetně vyobrazení abaku viz M. FOLKERTS: *„Boethius" Geometrie II. Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters*. Wiesbaden, Franz Steiner Verlag 1970, s. 83–91; vyobrazení tzv. *Girbertus Latio numeros abacique figura* nabízí např. K. VOGEL: Gerbert von Aurillac als Mathematiker. *Acta historica Leopoldina 16, 1985*, s. 13.

[29] Viz např. Boethius: De arithmetica libri duo I, 1. In: *PL* 63, c. 1079C–D: „*Inter omnes priscae auctoritatis viros qui, Pythagora duce, puriore mentis ratione viguerunt, constare manifestum est haud quemquam in philosophiae disciplinis ad cumulum perfectionis evadere, nisi cui talis prudentiae nobilitas quodam quasi quadrivio vestigatur, quod recte solertiam intuentis non latebit.*" Nebo Regulae Domnis Odonis Super abacum, c. 807B: „*Si quis notitiam abaci habere desiderat, necesse est ut in consideratione numeri studeat. Haec ars non a modernis, sed ab antiquis inventa, ideo a multis negligitur, quia numerorum perplexione valde implicatur, ut majorum relatione didicimus. Hujus artis inventorem Pythagoram habemus.*" A mnoho dalších.

[30] Viz např. Turchillus Compotista: Reguncule super abacum, s. 135: „*Ab antiquis mensa pytagorica, a modernis autem vel abax vel abacus mnuncupatur*." Nebo Euclidus Megarensis: Geometriae libri duo ab Boethio translaci. In: *PL* 63, c. 1333D: „*Pythagorici vero ne in multiplicationibus et partitionibus et in podismis aliquando fallerentur, ut in omnibus erant ingeniosissimi et subtilissimi, descripserunt sibi quamdam formulam quam ob honorem sui praeceptoris mensam Pythagoream nominabant, quia hoc quod depinxerant magistro praemonstrante cognoverant, a posterioribus appellabatur Abacus, ut quod alta mente conceperant, melius si quasi videndo ostenderent in notitiam omnium transfundere possent, eamque subterius habita sat mira descriptione formabant.*" Jiným častým názvem abaku byla *mensa geometricalis*, neboť byl využíván při geometrických výpočtech – viz např. Gerbertus: Regulae de numerorum abaci rationibus. In: *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 8; nebo Benrelius Parisiensis: Liber abaci, s. 359.

označení *S* (tj. *singularis*).[31] Vynecháme-li tři sloupce pro zlomky, první tři sloupce zprava značí jednotky, desítky a stovky, druhé tři sloupce zprava pak tisíce, desetitisíce a statisíce.[32] Aby bylo jasné, že se jedná o řád tisíců, přidávala se nad uvedená označení sloupců vodorovná čárka (v dalším postupu pak dvě, tři atd. čárky), jak ukazuje obr. 1.



Obr. 1. Abakus a vymezení jednotek, desítek, stovek, tisíců, desetitisíců a statisíců.

Gerbertova korespondence dokládá, že pro abacistu bylo alfou a omegou úspěchu zapisovat čísla do abaku správně.[33] Když byl totiž Gerbert požádán svým dřívějším žákem Konstantinem z Fleury o vysvětlení pravidel práce na

31 Viz abakus tzv. gerbertovské školy, vyobrazení nabízí kupř. K. VOGEL: *Gerbert von Aurillac als Mathematiker*, s. 13; nebo příklad výpočtu na abaku v díle neznámého abacisty přelomu 10. a 11. století tzv. *De minutiis* – viz Incertus abacista s. X: De minutiis. In: *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 241–242. Srov. také Bernelius Parisiensis: Liber abaci, s. 359–361.

32 Regulae Domni Odonis super abacum, c. 807C–D: „*Distinctio autem arcuum cum numeris talis est: singularis, decenarius, centenarius, millenarius, decenus millenarius, centenus millenarius, mille millenarius, decies mille millenus, centies mille millenus, millies mille millenus, decies millies mille millenus, centies millies mille millenus.*“ Podobně Bernelius Parisiensis: Liber abaci, s. 360–361.

33 Na problémy se zapisováním podle tohoto úzu naráželi středověcí myslitelé poměrně velmi často (pro ně obvyklý způsob práce s římskými číslicemi byl totiž naprosto odlišný) a upozorňuje na něj např. ve své pozdněstředověké učebnici ještě Křišťan z Prachatic – viz Cristannus de Prachaticz: *Algorismus prosaycus – Základy aritmatiky I*. Z. SILAGIOVÁ (ed. a přel.). Praha, OIKOYMENH 1999, s. 12–33.

abaku, varoval adresáta před využíváním textů jiného autora,[34] a to i přesto, že se sám již řadu let práci na abaku prakticky ani teoreticky nevěnoval. Raději volil cestu sepsání nových stručných regulí pro práci s početní tabulkou.[35] Důvody jsou vysvětleny jasně: Je nutno řádně rozlišovat, co je to číslice (*digitus*), článek (*articulus*), jaký je rozdíl mezi číslem jednoduchým (*simplex*) a složeným (*compositus*), jak je možné, že jednou je číslice jednotkou a jindy zase článkem, atp.[36]

Numerace je základní potíží, s níž se musel abacista vyrovnat. Pochopení toho, kam a kdy zapisovat (vkládat) do rozsáhlé tabulky jednotlivé symboly čísel, je nezbytné, měl-li být počtář na abaku úspěšný. Je tedy nutno vědět, že *digitus* (jakožto slovo znamená prst, zřejmě podle dávného a velmi rozšířeného úzu počítat pomocí prstů, čímž se následně označovala i jednotlivá čísla;[37] ostatně právě počítání na prstech dalo základ tomuto dělení čísel) označuje každé číslo menší než 10, tzn. *digitus* vyjadřuje hodnoty 1–9.[38] *Articulus* (jakožto slovo znamená článek) jsou čísla větší než deset (a samotné číslo deset), přičemž je možno rozdělit je na deset stejných dílů

34 Dřívější názor N. Bubnova, že Gerbert měl na mysli Abbona z Fleury (viz Gerbertus: Regulae de numerorum abaci rationibus, s. 7), byl podroben kritice – viz např. A. M. PEDEN: Introductory. In: Abbo of Fleury and Ramsey: *Commentary on the Calculus of Victorinus of Aquitaine*, s. xxx.

35 Gerbertus: *Regulae de numerorum abaci rationibus*, s. 6–7: „*Vis amicitiae pene impossibilia redigit ad possibilia. Nam quomodo rationes numerorum abaci explicare contenderemus, nisi te adhortante, o mi dulce solamen laborum, Constantine? Itaque cum aliquot lustra jam transierint, ex quo nec librum, nec exercitium harum rerum habuerimus, quaedam, repetita memoria, eisdem verbis proferimus, quaedam eisdem sententiis. Nec putet philosophus sine litteris haec alicui arti vel sibi esse contraria.*“

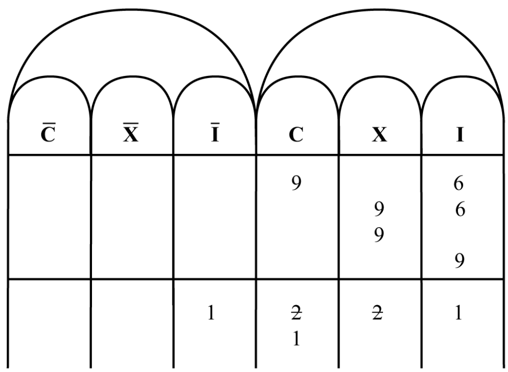
36 Gerbertus: *Regulae de numerorum abaci rationibus*, s. 7: „*Quid enim dicet esse digitos, articulos, minuta, qui auditor majorum fore dedignatur? Vult tamen videri solus scire, quod mecum ignorat, ut ait Flaccus. Quid cum idem numerus modo simplex, modo compositus: nunc digitus, nunc constituatur ut articulus*“ Srov. také Gerbertus: Fragmentum de norma rationis abaci. In: *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 24.

37 Viz např. Abbo of Fleury and Ramsey: *Commentary on the Calculus of Victorinus of Aquitaine III*, 67–69, s. 114–115.

38 Regulae Domni Odonis super abacum, c. 807C: „*Hoc autem diligenter considera, quod quidquid infra X est, digitus vocatur.*“ Viz např. také Bridfertus Ramesiensis: De loquela per gestum digitorum et temporum ratione libellus, c. 688C: „*…et arithmetici digitum vocant numerum omnem infra denarium, ut I, II, III, etc.*“ Nebo Cristannus de Prachaticz: Algorismus prosaycus I, s. 16: „*Digittus (sic dictus numerus; dicitur digittus, quia ut frequenter numeramus per digittos dicendo unum, duo etc.) est omnis numerus minor decem, ut 1, 2, 3, etc. usque 9 inclusive.*“ Srov. také např. A. P. JUŠKEVIČ: *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha, Academia 1977, s. 330–332.

– tzn. čísla 10, 20, 30 atd.[39] Číslo jednoduché (*simplex*) je pak takové, které lze vyjádřit pouze digitem.[40] Číslo složené (*numerus compositus*) je následně číslem, jež je složeno z článku a prstu (tj. jednotky), tedy např. číslo 12, 16 atp.[41]

Digitus se proto v abaku zapisuje (vkládá) pomocí číslice do prvního sloupce zprava (viz číslo 9 na obr. 2). Článek se následně zapisuje (vkládá) rovněž pomocí číslice označující digitus, ovšem do jiného sloupce abaku než je tomu v případě digitu (např. číslo 90 na obr. 2 – nulu představuje prázdné místo), složená čísla se zapisují digitem a článkem (viz čísla 906 a 96 na obr. 2).



Obr. 2. Zápis čísel 906, 96, 90 a 9 na abaku a jejich součet.

[39] Regulae Domni Odonis super abacum, c. 807C: „*Quod vero ad X vel ad majores numeros pervenit, ut est XX, XXX, XL, in hac arte articulus appellatur.*“ Viz např. také Bridfertus Ramesiensis: De loquela per gestum digitorum et temporum ratione libellus, c. 688C–D: „*Articulos quoque vocant numeratores, qui in decem aequales partes dividi possunt, ut X, XX, XXX, XL;…*“ Nebo Cristannus de Prachaticz: Algorismus prosaycus I, s. 18: „*Articulus (ille numerus) est (vocatur) omnis (id est quilibet) numerus, qui potest dividi in X partes equales (id est numerus divisibilis in X partes equales, inter quos numeros est denarius, quia dividitur in decem unitates, et 20 maior, quia dividitur in X dualitates, et sic de aliis) ita, quod nichil sit residuum neque diminutum (scilicet post totalem divisionem), ut decem dividitur in decem unitates et 20 (ille articulus) in decem dualitates et 30 (ille articulus) in decem ternarios et sic consequenter de aliis articulis*.“

[40] Commentarii in Gerberti regulas de numerorum abaci rationibus, s. 251: „*Singularis itaque, idem simplex, nuncupatur omnis quilibet numerus intra denarium constitutus, … Qui singularis, id est simplex, dicitur propterea, quod omnes numeri, qui in eo disponuntur, simpliciter enunciantur*.“

[41] Viz např. Commentarii in Gerberti regulas de numerorum abaci rationibus, s. 251–252; srov. Cristannus de Prachaticz: Algorismus prosaycus I, s. 18.

IV.

Právě o těchto nových symbolech čísel (*caracteres*, *apices*), jejichž pomocí lze podle Richera vytvořit všechna čísla, se často hovoří jako o prvním výskytu tzv. indo-arabských číslic v latinské Evropě. Gerbertův pokračovatel, abacista Bernelius z Paříže, používal ve své *Liber abaci* tzv. apexy, *apices*,[42] počátek jejichž užívání byl spojován s Boethiem.[43] Gerbertovy *caracteres* (podle Richerovy zprávy) byly jakési žetony či destičky s číslicemi, kterých si samotný Gerbert vyrobil na tisíc,[44] avšak o vlastní podobě číslic nám nezbývá než spekulovat. *Apices* či *caracteres* plnily stejnou funkci a běžně se objevuje ztotožnění obou názvů (*caracteres vel apices*).[45] Navíc samotný Richer je nazývá také *notae* a dále se ve středověku či raném novověku objevují označení *figura*, *cifra*, *signum* či *elementum*.[46] Destičky či žetony s číslicemi pro potřeby abacistických výpočtů byly zřejmě využívány již v poslední čtvrtině 10. století – podobu tehdejších indo-arabských číslic, které měly nahradit římský a řecký způsob zápisu čísel,[47] může dokládat např. rukopis

---

42 Těchto *apices* či *caracteres* bylo u Bernelia devět (bez nuly) – viz Bernelius Parisiensis: Liber abaci, s. 361 (číslice zde uvádím v naší běžné podobě, na editovanou podobu *apices* viz obr. 3): „*His igitur expeditis, ad ipsos caracteres veniamus, et quibus figuris prænotentur, ascribere properemus. Unitas, quæ primus caracter dicitur, sic figuratur 1 sive per græcum A alfa. Binarius autem, vel ita 2 vel per græcum B. Ternarius autem, ita 3 sive per græcum Γ gamma. Quaternarius ita 4 sive per græcum Δ delta. Quinarius ita 5 sive per græcum he E. Senarius ita 6 sive per græcum Σ. Septenarius ita 7 sive per græcum Z. Octonarius ita 8 sive per græcum heta H. Novenarius vero sic figuratur 9 sive per græcum teta Θ.*“ Desátý znak pro nulu se v Evropě používá až od 12. století. Blíže viz např. L. C. KARPINSKI – D. E. SMITH: *The Hindu-Arabic Numerus*. Boston, Ginn and Company 1911, s. 117–118; srov. také Bridfertus Ramesiensis: De loquela per gestum digitorum et temporum ratione libellus, c. 688D.

43 F. CAJORI: *A history of mathematics*. New York, Macmillan, ^{5}1991, s. 116.

44 Richerus Remensis: Historiarum libri quatuor III, 54, c. 105A: „*Ad quarum etiam similitudinem, mille corneos effecit caracteres, qui per 27 abaci partes mutuati, cujusque numeri multiplicationem sive divisionem designarent; tanto compendio numerorum multitudinem dividentes vel multiplicantes, ut prae nimia numerositate potius intelligi quam verbis valerent ostendi.*“

45 Podrobněji viz např. K. MENNINGER: *Number words and number symbols: a cultural history of numbers*. Cambridge, MIT Press 1969, s. 324.

46 Podrobněji viz např. L. C. KARPINSKI – D. E. SMITH: *The Hindu-Arabic Numerals*, s. 119.

47 K podobě těchto znaků viz např. Bridfertus Ramesiensis: De loquela per gestum digitorum et temporum ratione libellus, c. 696A–698C; revidovaný přehled Bubnovovy rekonstrukce přenosu těchto číslic na evropský Západ, včetně důležitosti řecké numerace, nabízí např. H. P. LATTIN: The Origin of Our Present System of Notation according to the Theories of Nicholaus Bubnov. In: *Isis 19, 1933, č. 1*, s. 181–194.

Codex Vigilanus ze severošpanělského kláštera Albelda z roku 976, příp. rukopis z kláštera Svatého Havla.[48]

Je pravděpodobné, že Gerbert využil způsob zápisu užívaný v iberském prostředí a aplikoval jej na svůj abakus,[49] čímž zamýšlel usnadnit početní úkony na této pomůcce. Jak však byly tyto *caracteres* či *apices*,[50] které přinesly nový způsob symbolického zápisu čísel, uvedeny do západní křesťanské Evropy?

Obr. 3. Raná podoba indo-arabských číslic v latinských textech. První řádek: Albelda, Codex Vigilanus, 976; druhý řádek: Fleury, Gerbertus, Rationes numerorum abaci, 11. století; třetí řádek: Lotrinsko, Pseudo-Boethius, Geometria II, 11. nebo 12. století; čtvrtý řádek: Liber abaci (Bernelini), ed. A. Olleris, 1867.

S odpovědí na tuto otázku se pojí celá řada nesnází. Přestože latinští středověcí křesťané 10. či 11. století spojovali vynález abaku s pythagorejci (jako jeho konstruktér byl označován např. Archytás z Tarentu,[51] o němž se ve svých spisech zmiňuje i Boethius[52]), lze říci, že hlavním důvodem této

48 Srov. např. G. F. HILL: *The Development of Arabic Numerus in Europe*. Oxford, Clarendon Press 1915, s. 28–29.

49 F. CAJORI: *A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching*. New York, Macmillan 1910, s. 117–119.

50 Pojednává o nich, včetně jmen jednotlivých symbolů, např. Regulae Domni Odonis super abacum, c. 808A.

51 Viz např. Anonymus: Abacus in Boethii geometria subditicia. In: *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 155: „*Sed jam tempus est ad geometricalis mensae traditionem, ab Archita, non sordido hujus disciplinae auctore, Latio accomodatam, venire, si prius praemisero, quot sint genera angulorum et linearum, et pauca fuero praelocutus de summitatibus et extremitatibus*."

52 Viz např. Boethius: De musica libri quinque 3, 11. In: *PL* 63, c. 1236D–1237C.

„datace“ vzniku abaku byla nutnost dostat „objev abaku“ (a počátek používání *apices*) před vlastní Boethiův život, neboť pod jeho jménem kolovalo větší množství matematických prací, včetně překladů (excerpt) z Eukleidových *Základů*[53] a rovněž dvě varianty jeho tzv. *Geometrie*; součástí druhé verze je i výše zmiňovaný abakus. Tzv. Boethiova *Geometrie* však není dílem „posledního Římana a prvního scholastika“, nýbrž je to konvolut několika textů, přičemž jedním z nich je i abacistické pojednání, které s největší pravděpodobností vzniklo až na konci 10. nebo v 11. století, a jedná se tudíž o variaci na raně-středověký či gerbertovský abakus. Původ *apices* tedy není nutné klást do 5. století či před něj, stačí se zaměřit na Gerbertovy *caracteres* a v souvislosti s touto dobou nalézt i původ indo-arabských číslic v křesťanské Evropě.

O pyrenejském původu Gerbertových „arabských“ číslic (tzv. gobar či gubar[54]) není třeba pochybovat.[55] Sám Gerbert žádá v roce 984 Bonfilla, biskupa v Geroně, a Geralda, opata v Aurillacu, o kopie překladů matematické knihy *De multiplicatione et divisione numerorum libellum a Joseph Hispano*,[56] resp. *De multiplicatione et divisione numerorum a Joseph sapiens*.[57] Tajemná osoba Josefa Moudrého (příp. Španělského) zůstává stále zastřena množstvím

53 Srov. M. FOLKERTS: „Boethius“ Geometrie II, s. 69–82 či M. BEČVÁŘOVÁ: *Eukleidovy Základy a jejich vydání a překlady*. Praha, Prometheus 2002, s. 32–33.

54 Jedná se o západoarabské číslice, jejichž název je odvozen od prachu, do nějž byly často zapisovány.

55 Hned několik zdrojů dokládá, že se na Pyrenejském poloostrově učil *mathésis* – viz např. Richerus Remensis: Historiarum libri quatuor III, 43, c. 101C–D: „*Dux itaque non abnuens, petenti liberaliter favit, ac fratrum consensu Gerbertum assumptum duxit, atque Hattoni episcopo instruendum commisitt Apud quem etiam in mathesi plurimum et efficaciter studuit. … Et quia musica et astronomia in Italia tunc penitus ignorabantur, mox papa Ottoni regi Germaniae et Italiae per legatum indicavit, illuc hujusmodi advenisse juvenem, qui mathesim optime nosset, suosque strenue docere valeret.*“ Adémar z Chabannes pak hovoří o studiu v Córdobě – Ademarus Cibardi: Historiarum libri tres III, 31. In: *PL* 141, c. 49A: „*Girbertus vero natione Aquitanus. Aureliacensis sancti Geraldi ecclesiae, causa sophiae primo Franciam, deinde Cordobam lustrans, cognitus ab imperatore, archiepiscopatu Ravennae donatus est.*“ Vilém z Malmesbury zmiňuje saracénský původ samotného Gerbertova abaku – viz Willelmus Malmesburiensis: De gestis regum anglorum libri quinque II, 167, c. 1138B–1139A.

56 Gerbertus: Epistola 25 (xvii): „*De multiplicatione et divisione numerorum libellum a Joseph Hispano editum abbas Guarnerius penes vos reliquit, ejus exemplar in commune rogamus. Si limina beatorum Remigii et Dionysii datur vobis copia videndi, nuntio praemisso vestris alloquiis poterimus condelectari.*“

57 Gerbertus: Epistola 33 (55, xxv): „*De multiplicatione et divisione numerorum Joseph sapiens sententias quasdam edidit, eas Pater meus Adalbero Remorum archiepiscopus vestro studio habere cupit*.“

nejasností. Vzhledem k absenci dokladů výjimečných možností studia *artes* ve Španělské marce ve 2. polovině 10. století[58] a nepopiratelném přímému vlivu Židů na kontakty mezi křesťanskou a muslimskou části poloostrova, se badatelé začali přiklánět k interpretaci, jež přisuzuje Židům klíčovou roli při stycích křesťanského obyvatelstva s jistými texty z arabských zdrojů v průběhu 10. století.

Významné místo mezi diplomaty tehdejší doby zastával i u nás relativně dobře známý Chasdaj ben Šaprut (ve službách córdobského chalífátu mimo jiné inicioval cestu židovského cestovatele a obchodníka Ibráhíma Ibn Jákúba, který v 60. letech 10. století navštívil a podal zprávu o Praze[59]), který se stýkal s významnými osobnostmi křesťanské strany (jak dokládá výše uváděný příklad Jana z Gorze), s nimiž byl v úzkém kontaktu i Gerbert (např. Hatto, biskup ve Vic, Gothar, biskup v Geroně, Miro Bonfill, později biskup a adresát Gerbertových listů, Borrell II. z Barcelony, hlavní organizátor Gerbertovy cesty přes Pyreneje). Z častých kontaktů této skupiny lidí vznikla hypotéza o skupině žáků,[60] přičemž zásluhu na studiu obohaceném o arabské zdroje mohl mít zřejmě pouze Chasdaj, čímž by se zároveň mohl stát oním Janem Moudrým[61] (tato přezdívka může mít rovněž řadu biblických paralel s katalánským děním[62]).

Toto je jen jedna z hypotéz, jak mohla vypadat cesta, odkud, kým a jak se prvotní podoba arabských číslic dostala na křesťanský Západ – v Barceloně se zásluhou židovského zprostředkování mohly objevit jisté podstatné texty této notifikace (viz také zmiňovaný *Codex Vigilanus*), s nimiž se Gerbert mohl seznámit během svého působení ve Španělské marce, a odtud již mohly putovat do Říma, Remeše atd.

58 E. JUNYENT i SUBIRÀ: *Diplomatari dela Catedral de Vic (segles IX–X)*. Vic, Patronat d’Estudis Ausonecs 1980–1996, doc. 303, resp. 413.

59 Blíže viz např. M. MENDEL – B. OSTŘANSKÝ – T. RATAJ: *Islám v srdci Evropy*. Praha, Academia 2007, s. 156–157.

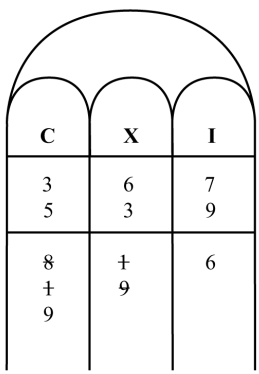
60 Viz R. ORDEIG i MATA: Ató, bisbe i arquebisbe de Vic (957–971), antic arxiprest-ardaica de Girona. *Studia Vicensia 1, 1989*, s. 61–97.

61 Podobně viz M. DESTOMBES: Un astrolabe carolingien et l’origine de nos chiffres arabes. *Archives internationales d’histoire des sciences 15, 1962*, s. 17; nebo J. SAMSÓ: Cultura científica àrab i cultura científica llatina a la Catalunya altmedieval: El monestir de Ripoll i el naixement de la ciència catalna. In: *Symposium internacional sobre els oríges de Catalunya (segles VIII–XI). Vol. 1.* Barcelona, RABL 1991, s. 269.

62 Srov. M. ZUCCATO: Gerbert of Aurillac and a Tenth-Century Jewish Channel for the Transmission of Arabic Science to the West. *Speculum, 80, 2005*, s. 755.

V.

Abakus v podání myslitelů konce 10. a v 11. století sloužil především jako pomůcka k násobení a dělení – s mírnou nadsázkou lze říci, že je to první pokus o generalizaci technologie výpočtů v Evropě.[63] Na abaku lze však provádět velmi snadno i sčítání a odčítání. Dokonce i pro dnešního čtenáře je postup abacisty při sčítání velmi snadno pochopitelný, neboť podobným způsobem řada lidí dodnes počítá, což je bezpochyby dáno obdobným pozičním zápisem čísel. Navíc je sčítání integrální součástí postupu práce na abaku i v situaci, kdy násobíme nebo dělíme, proto by mohlo být užitečné představit nejprve tento matematický úkon – je pro nás intuitivně snadno pochopitelný a zároveň může posloužit jako úvod do práce na početní tabulce. Jako příklad stačí jednoduchý početní úkon – součet čísel 367 a 539. Výpočet na abaku vypadá takto (obr. 4):



Obr. 4. Součet sčítanců 367 a 539 na abaku.

Pouze pro nás je běžnější asi takový zápis:
367
539
906
Na abaku se však sčítá vlastně totožně:

Sčítaná čísla se zapíší (vloží) do sloupců podle hodnot, které představují, tedy u čísla 367 se číslice „3“ zapíše (vloží) do sloupce stovek (v abaku

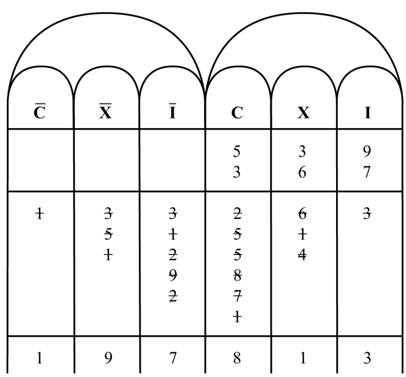
[63] A. BORST: *The Ordering of Time. From Ancient Computus to the Modern Computer*. Cambridge, Polity Press – Blackwell Publishers 1993, s. 58.

značeno jako „C“), číslice „6“ do sloupce pro desítky („X“) a číslice „7“ do sloupce pro jednotky (tj. „I“). Obdobně se zapíše (vloží) i druhé číslo, které chceme s prvním sečíst. Následně již probíhá samotné sčítání:

1. sečtu jednotky, tj. 7 + 9 = 16, tedy do sloupce pro jednotky vepíši číslici „6“, do sloupce pro desítky číslici „1“;
2. sečtu desítky, tj. 6 + 3 = 9, tedy do sloupce pro desítky vepíši číslici „9“ (sčítány totiž byly desítky, tudíž je výsledek potřeba napsat do sloupce desítek);
3. sečtu stovky, tj. 3 + 5 = 8, tedy do sloupce pro stovky vepíši číslici „8“;
4. je-li v kterémkoli sloupci více číslic pod sebou, je nutno pokračovat v dalším sčítání: V řádu desítek jsou nyní pod sebou číslice „1“ a „9“, sečtu tedy 1 + 9 = 10, tedy do sloupce pro desítky nepíši nic (tzn. nula), ale do sloupce pro stovky musím napsat číslici „1“; zároveň jsou číslice „1“ a „9“ ve sloupci desítek přeškrtnuty (tzn. jsou odstraněny z abaku), aby bylo jasné, že již byly sečteny;
5. ve sloupci „C“ nyní jsou pod sebou dvě číslice („8“ a „1“), je nutno i tyto sečíst, tj. 8 + 1 = 9, tedy do sloupce pro stovky je vepsána (vložena) číslice „9“ a škrtnuty (odstraněny) číslice „8“ a „1“.

Protože v žádném sloupci již nejsou dvě či více nepřeškrtnutých číslic pod sebou a v každém bylo dosaženo výsledku, je sčítací proces podle abaku u konce a známe výsledek – tím jsou nepřeškrtnuté (neodstraněné) číslice „9“ (ve sloupci stovek) a „6“ (ve sloupci jednotek). Součet je proto 906.

Také proces násobení je poměrně snadno pochopitelný. Na rozdíl od předchozího teď mějme součin čísel 539 a 367 (viz obr. 5).



Obr. 5. Součin činitelů 539 a 367 na abaku.

Způsob násobení na abaku je vlastně totožný s naším násobením, liší se pouze způsob zápisu. Ve formě pro nás známější by tento matematický úkon vypadal asi takto:

```
          5 3 9
*         3 6 7
---------------
            6 3
          2 1
        3 5
          5 4
        1 8
      3 0
        2 7
        9
    1 5
-----------------
    1 9 7 8 1 3
```

Jelikož se však při počítání na abaku kladou čísla do jednotlivých sloupců, vypadá abacistický „zápis“ odlišně. Výpočet však probíhá *de facto* stejně:

1. nejprve se sedmičkou (tj. jednotkami násobitele) násobí čísla horní řady a mezivýsledky se postupně píší (kladou) do sloupců pro jednotky, tedy:
   a. nejprve násobíme 7 * 9;
      i. výsledek je 63, číslici „3“ proto vepíšeme (položíme) do sloupce pro jednotky;
      ii. číslici „6“ vepíšeme (položíme) do sloupce pro desítky;
   b. dále násobíme 7 * 3;
      i. výsledek je 21, číslice „1“ vepíšeme (položíme) do sloupce pro desítky, neboť byl násobenec ve sloupci pro desítky;
      ii. číslici „2“ zapíšeme do sloupce pro stovky, neboť byl násobenec ve sloupci pro desítky a dvojka představuje *articulus* dílčího výsledku;
   c. a nyní násobíme 7 * 5;
      i. výsledek je 35, číslici „5“ zapíšeme do sloupce pro stovky, neboť byl násobenec ve sloupci pro stovky;
      ii. číslici „3“ zapíšeme do sloupce pro tisíce, neboť byl násobenec ve sloupci pro stovky a trojka představuje *articulus* dílčího výsledku;
2. poté následuje násobení násobence šestkou a mezivýsledky se píší do sloupců pro desítky (na obrázku abaku číslice „4“), stovky (na obrázku abaku číslice „5“ a „4“), tisíce (na obrázku abaku číslice „1“, nula se neznačí) a desetitisíce (na obrázku abaku číslice „3“);

3. dále se násobenec násobí trojkou, přičemž výsledky se píší do sloupců pro stovky (na obrázku abaku číslice „7“), tisíce (na obrázku abaku číslice „2“ a „9“), desetitisíce (na obrázku abaku číslice „5“) a statisíce (na obrázku abaku číslice „1“);
4. a pak se již sčítá, obdobně jako u předešlého příkladu – tedy v jednotlivých sloupcích a dosáhne-li se dvouciferného výsledku, zapíše se (vloží) první číslice výsledku do bezprostředně přiléhajícího levého sloupce (na obrázku abaku číslice „1“ ve sloupci pro stovky a desetitisíce a číslice „2“ ve sloupci pro tisíce), *digitus* výsledku se uvede pod spodní čáru a označuje výsledek; sečtené číslice se odstraní.

Výsledek je pro větší přehlednost často vepsán (vložen) do spodní části abaku.

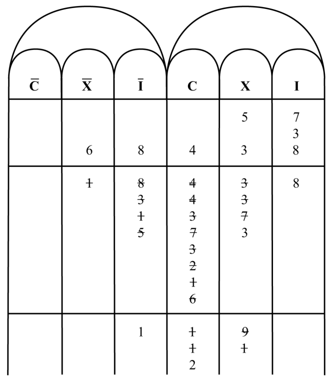
Vlastní texty, které se týkají abaku, se pak zaměřují zejména na to, aby upozornily uživatele početní tabulky na správné umístění číslic (*apices*, *caracteres*) do patřičných sloupců tím, že uvádějí konkrétní pokyny pro vybrané případy.[64]

VI.

Vrcholným uměním na abaku bylo dělení – hlavní důvod, proč byl později Gerbert považován za ďáblova spojence – vždyť již podle Richera z Remeše přece říkal, že na abaku lze především s jistotou a rychlostí dělit velká čísla.[65] Gerbertisté dělili s využitím abaku značně odlišně, než je zvyklý člověk přelomu druhého a třetího tisíciletí, rozhodne-li se využít tužku a papír. Způsobů, jak mohl abacista postupovat, bylo více, uveďme tedy jako příklad dělení čísla 68 438 číslem 57 podle nejčastěji uváděného způsobu (viz str. 6).

64 Gerbertus: Regulae de numerorum abaci rationibus, s. 9–10: „*Si multiplicaveris singularem numerum per decenum dabis unicuique digito decem et omni articulo centum (1) Si decenum per decenum, dabis digitis centum, articulis mille (2) Si decenum per centenum, dabis digitis mille, articulis decem millia (3) Si centenum per centenum, dabis digitis decem millia, articulis centum millia (4) Si centenum per millenum, dabis digitis centum millia, articulis decies centena millia (5) Si millenum per millenum, dabis digitis decies centena millia, articulis centies centena millia (6)…*“ Srov. také ibid, s. 11; Abacus in Boethii geomatria subdiiticia, s. 159–160; Abbo Floriacensis: In Calculum Victorii commentario. In: Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica, s. 209; Herigerus Lobiensis: Regulae de numerorum abaci rationibus, s. 208–209, etc.

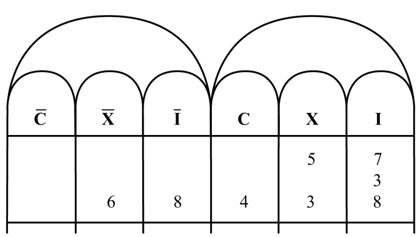
65 Richerus Remensis: Historiarum libri quatuor III, 54, c. 105A: „*… cujusque numeri multiplicationem sive divisionem designarent; tanto compendio numerorum multitudinem dividentes vel multiplicantes, ut prae nimia numerositate potius intelligi quam verbis valerent ostendi.*“



Obr. 6. Dělení na abaku.

Na první pohled se tento způsob hledání podílu může zdá velmi složitý. V praxi tomu tak být nemusí, přestože toto dělení se výrazně liší od našeho obvyklého ručního dělení. Krok po kroku by gerbertista či abacista postupoval takto:

1. na první řádek vepíše dělitele, tj. číslici „57“ – samozřejmě číslice „7“ bude ve sloupci pro jednotky a „5“ pro desítky;
2. na druhý řádek vypíše číslo, jehož součet s dělitelem nabídne kulaté číslo (zde 60), s nímž se bude snadněji pracovat; v konkrétním případě je to tedy číslice „3“; další průběh dělení bude usnadněn tím, že dělit se bude šedesáti a nikoli sedmapadesáti, což by bylo znatelně náročnější;
3. třetí řádek pak tvoří dělenec, opět zapsaný podle pravidel abaku, tedy v našem konkrétním případě je číslice „8“ vložena (vepsána) do sloupce pro jednotky i jednotky tisíců (tj. tisíce), číslice „3“ se nachází v desítkách, číslice „4“ ve stovkách a číslice „6“ v desítkách tisíců; tímto je ukončena fáze zápisu (viz obr. 7a) a matematik může začít s vlastním

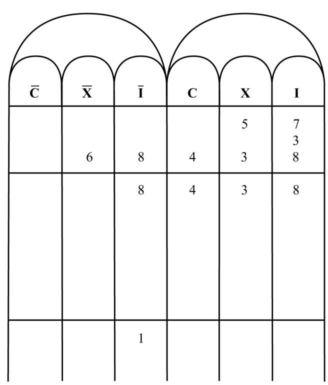


Obr. 7a. Dělení, kroky 1–3.

dělením; důležité je, že dělitelem v praxi nebude číslo 57, jak by se dalo očekávat, nýbrž číslo 60;

4. nyní abacista shlédne dělence (tedy číslo 68 438) a zjistí, která jeho část (bráno zleva – tedy buď 6 nebo 68 nebo 684 atd.) bude nejsnadněji dělitelná číslem 60; uvidí, že jsou to hned první dvě čísla u dělence v abaku a počítá tedy: 68 / 60 = 1, zbytek 8; zbytek zapíše pod čáru zápisu celého příkladu, a jelikož dělil desetitisícový a tisícový sloupec a výsledek je jednociferný, zapíše ho do sloupce pro tisíce; výsledek prvního úkonu (tj. číslici „1“) pak umístí na samotný spodek abaku; správný sloupec, kam umístit tuto číslici, určí podobná úvaha – desetitisíce (5. sloupec) byly děleny desítkami (2. sloupec), je tedy nutno jeden sloupec u dělence ubrat – výsledek se tedy zapíše do 4. sloupce (tisíce); používá se rovněž vzorec $c = (b - a) + 1$, (kde c je hledaný sloupec, b je řád dělence a a je řád dělitele), tedy $c = (5 - 2) + 1$, tzn. výsledný sloupec je čtvrtý;
5. v dalším kroku je nutno doplnit část dělence, kterou jsme při prvním dělení nebrali v potaz – lze říci, že jsme číslem 60 vydělili 68 000, avšak máme dělit číslo 68 438, musíme tedy vedle zbytku z prvního dělení dopsat (vložit) chybějících 438, což v praxi znamená, že pouze opíšeme v příslušných sloupcích prvním krokem vynechanou hodnotu; takto vzniká současný zbytek – tj. 8 438.

Jak v tuto chvíli vypadá abakus, ukazuje obr. 7b.

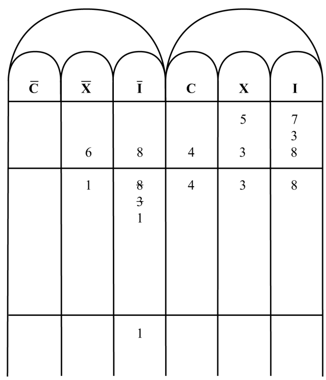


Obr. 7b. Dělení, kroky 4–5.

6. Ale teď abacista nesmí zapomenout, že dělence dělil jiným dělitelem, než měl (číslem 60 místo 57), musí proto tento „doplněk“ (číslice „3“ ve druhém řádku abaku) přičíst k dosavadnímu zbytku; přičítá se však násobek výsledku ze 4. kroku, tedy ve spodní části uvedená hodnota se

vynásobí o doplněk (1 * 3 = 3), přičemž tento výsledek (tj. číslice „3“) se vepíše do prostřední části abaku ke zbytku; sloupec je dán sloupcem výsledku ze 4. kroku (tj. 4. sloupec);

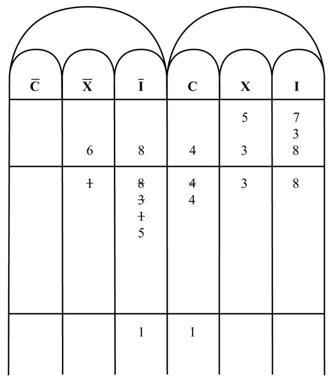
7. a nyní je možné stanovit zbytek prvního dělení součtem obou zbytků; jelikož u jednotek, desítek a stovek není co sčítat, sečtou se pouze tisíce (8 + 3 = 11) a výsledek se zapíše podle pravidel sčítání, včetně vymazání (škrtnutí) sečtených položek; takto je číselně vyjádřen zůstatek po prvním dělení a ten činí 11 438, což představují nepřeškrtnuté číslice v prostřední části abaku (viz obr. 7c);



Obr. 7c. Dělení, kroky 6–7.

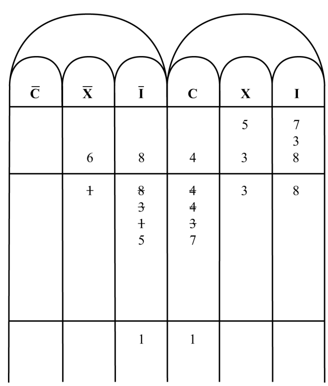
8. v tuto chvíli lze pokračovat dělením, když dělencem je nyní číslo 11 438 a dělitelem opětovně 60; je zřejmé, že první dvě čísla dělence nelze dělit „60“, aniž by byl výsledek větší nebo roven jedné, je nutno se tedy o jeden řád posunout a dělit číslo 114 – tímto posunutím se nám také mění sloupec pro výpočet správného umístění výsledku, neboť *b* již proto nebude mít hodnotu 5, nýbrž 4, takže pro tento výpočet bude platit, že $c = (b - a) + 1$, tedy $c = (4 - 2) + 1 = 3$ – výsledek druhého dělení tedy bude ve spodní části abaku zapsán do 3. sloupce; a výsledkem je samozřejmě „1“, neboť 114 / 60 = 1 se zbytkem 54, tento zbytek se, podobně jako v předešlém případě, napíše do sloupce pod dělence – tzn. „4“ do sloupce pro stovky a „5“ do sloupce pro tisíce;

9. opětovně je třeba myslet na zbytek, který jsme při druhém dělení nebrali v potaz (tzn. „3“ a „8“ v řádu desítek, resp. jednotek), což počtář na abaku provede tak, že tyto číslice z prostřední části abaku neodstraní, kdežto číslo, které bylo děleno (tzn. 114) přeškrtne (odstraní) a v platnosti ponechá pouze zbytek (tj. 54 v tisícovém a stovkovém sloupci) – abakus má např. podobu, jakou ukazuje obr. 7d;



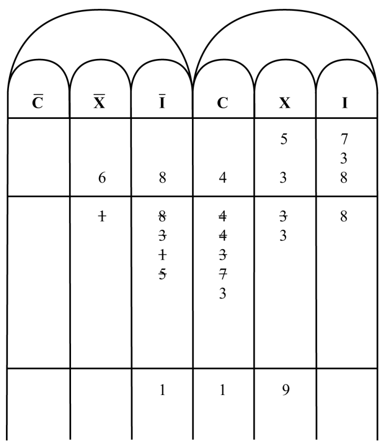
Obr. 7d. Dělení, kroky 8–9.

10. k dosavadnímu zbytku musí opět přičíst součin výsledku tohoto druhého dělení s doplňkem (analogicky jako v 6. kroku), tedy 1 * 3 = 3, protože i výsledek druhého dělení byl „1“ a doplněk je stále stejný (tj. „3“); a protože umístění výsledku tohoto součinu je dáno řádkem výsledku druhého dělení, vepíše (vloží) se číslice „3“ do prostřední části abaku v řádku stovek;
11. nyní je zapotřebí stanovit stávající zbytek, který je (stejně v 7. kroku) součtem hodnot v pracovní části abaku – v řádu jednotek, desítek a tisíců nyní není co sčítat, v platnosti tak zůstávají stávající hodnoty, pouze u stovek se sečte 4 + 3, čímž vznikne výsledek „7“ a sčítané hodnoty se z abaku odstraní (škrtnou); zbytek po druhém dělení je tedy 5 738 a aktuální podobu abaku ukazuje obr. 7e;



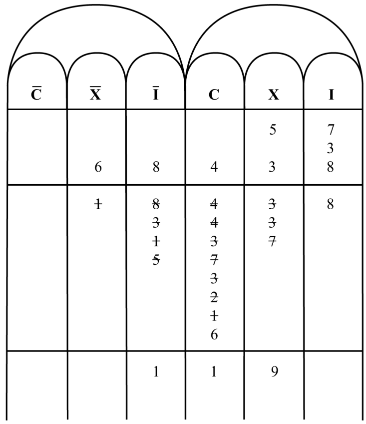
Obr. 7e. Dělení, kroky 10–11.

12. na řadu přichází třetí dílčí dělení (jako kroky 4 a 8) – je zřejmé, že číslem „60“ nelze dělit „57“, dělit se proto musí číslice „573“, výsledek se musí (opět podle uvedeného vzorce) vepsat o jeden řád více vpravo (tj. desítky) a do sloupce desítek bude náležet i jednotka zbytku; v tomto konkrétním případě tedy: 573 / 60 = 9, zbytek 33, ergo číslici „9“ (výsledek třetího dělení) vepíšeme (vložíme) do řádu desítek spodní části abaku a v prostřední části abaku uvedeme zbytek, když jednu číslici „3“ vložíme do řádu desítek a druhou do stovek;
13. nezbytností (obdobně jako u kroků 5 a 9) je odstranit (škrtnout) číslice, s nimiž jsme se ve třetím dělení vypořádali, a patřičně uvést (ponechat) zbytek, který jsme nedělili (tj. řád jednotek) – abakus má nyní např. podobu jako na obr. 7f;



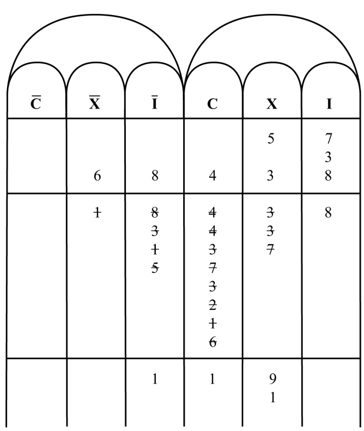
Obr. 7f. Dělení, kroky 12–13.

14. následně je nutno opět výsledek třetího dílčího dělení (jako u kroků 6 a 10) vynásobit doplňkem (nyní 9 * 3 = 27) a tento součin vepsat do prostřední části abaku, přičemž určujícím řádem je znovu výsledek dílčího dělení (tj. „9“) – tedy číslice „7“ je vložena (vepsána) do řádu desítek a číslice „2“ do řádu stovek;
15. a i nyní se opakují kroky 7 a 11, tedy dojde k sečtení obou zbytků: v desítkách je to 3 + 7 = 10, tzn. jsou vymazána (přeškrtnuta) obě sčítaná čísla a pod ně se nenapíše nic (tj. nula), kdežto k řádu stovek se vloží „1“, která se přičte k již danému zbytku, tedy 3 + 2 + 1 = 6; všechny tři sčítané hodnoty se odstraní (přeškrtnou) a pod ně se napíše výsledek, tj. „6“; abakus nyní vypadá asi jako na obr. 7g;



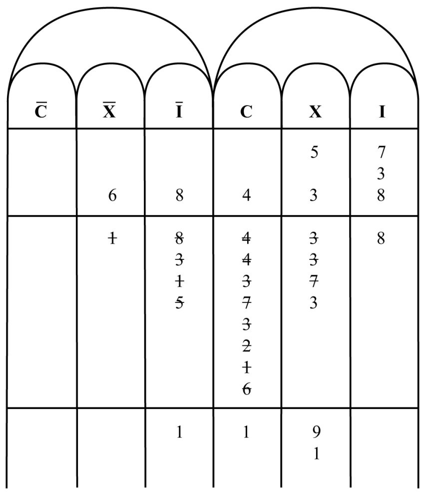
Obr. 7g. Dělení, kroky 14–15.

16. na řadě je nyní čtvrté dílčí dělení (obdoba s kroky 4, 8 a 12); aktuálním zbytkem je „608“, tedy již první dvě číslice (tj. „60“) jsou dělitelné šedesáti (60 / 60 = 1), výsledek („1“) se zapíše ve spodní části abaku do řádu desítek (neboť $c = (b - a) + 1$, tedy $c = (3 - 2) + 1 = 2$, tzn. 2. sloupec), dělení tentokrát proběhlo beze zbytku, v prostřední části se abaku se proto nic nedoplňuje;
17. opět je nutno správně označit zbytek (jako kroky 5, 9 a 13), který jsme ve čtvrtém dílčím dělení nebrali v potaz, tzn. pouze „8“, kdežto „6“ v řádu stovek je nutno škrtnout (odstranit) a dostaneme podobu abaku, jak ukazuje obr. 7h;



Obr. 7h. Dělení, kroky 16–17.

18. v souladu s kroky 6, 10 a 14 nyní musí abacista vynásobit výsledek čtvrtého dílčího dělení s doplňkem (tj. 1 * 3 = 3) a součin doplnit (podle sloupce výsledku dílčího dělení) do prostřední části abaku (zde vepsat „3“ do řádku desítek);
19. tradiční krok sčítání zbytků dělení a součinu výsledku s doplňkem (viz kroky 7, 11 a 15) může nyní vynechat, neboť není co sečíst (zbytek je nyní 38) – názorně na obr. 7i;



Obr. 7i. Dělení, kroky 18–19.

20. jelikož zbytek již nelze dělit šedesáti, je stávající hodnota zároveň zbytkem celého dělení; výsledek je už pouhým součtem hodnot uvedených ve spodní části abaku – v řádu jednotek není nic, výsledný podíl je tedy ukončen nulou; v řádu desítek součet 9 + 1 = 10 znamená, že počtář odstraní (vyškrtne) obě čísla, i v tomto řádu proto nezůstane nic (tj. nula) a vepíše do bezprostředně přiléhajícího sloupce vlevo „1“; sečte hodnoty ve sloupci stovek (1 + 1 = 2), obě číslice „1“ (první byla výsledkem druhého dílčího dělení, druhá výsledkem právě provedeného součtu hodnot ve sloupci desítek ve spodní části abaku) vyškrtne a pod ně napíše výslednou číslici „2“, a jelikož v tisícovém sloupci již není co sčítat, dobral se gerbertista zdárně výsledku: 68 438 / 57 = 1200, zbytek 38 (závěrečná podoba abaku je pak taková, jak bylo uvedeno výše – viz obr. 6).

Přestože se toto dělení[66] může zdát značně složité, bylo zřejmě v raném středověku využíváno poměrně často, neboť umožňuje velmi intuitivně (pomocí kulatého čísla) dělit i velká čísla, aniž by bylo zapotřebí řady dílčích složitých výpočtů. Postup je tedy poměrně složitý a pro málo zkušeného uživatele možná nepřehledný, avšak poskytoval přesné a snadno zjistitelné výsledky i u dělení velkých čísel.

VII.

Gerbert z Aurillacu sice zanechal jen drobné texty, v nichž vysvětluje abacistické postupy, přesto se jeho jméno (patrně zásluhou jeho pedagogického působení) stalo symbolem matematické a počtářské výjimečnosti na tzv. *mensae geometricalis*, početní tabulce. Vizuálně značně odlišný způsob provádění základních matematických operací na abaku (sčítání, odčítání, násobení, dělení) je však v zásadě velmi podobný tomu, jak dodnes počítáme. Zásluhu na rozšíření těchto způsobů počítání neměl jen Gerbert samotný, ale relativně mohutný proud vzdělanců a matematiků, kteří na konci 10. a v průběhu 11. století dále šířili jeho slávu. Pro následný rozvoj evropské matematiky bylo neméně důležitým impulsem osvojení a užívání indo-arabských číslic, které umožnily pracovat v desítkové soustavě a výrazně změnily tvář i *modus operandi* matematiky.

Key words: skill of calculation ● Early Middle Ages ● "gerbertian" abacus ● medieval mathematics

---

66 Podobu vlastního gerbertistického abacistického pojednání o dělení viz např. Commentarii in Gerberti regulas de numerorum abaci rationibus, s. 263–264: „*Decenum semotum, id est XX, XXX, XL, L, LX et cetera, centenum semotum, id est CC, CCC, CCCC, D et cetera, millenum semotum, id est* $\overline{II}$, $\overline{III}$, $\overline{IIII}$, $\overline{V}$, $\overline{VI}$, *et deinceps hujusmodi reliquos, vel centenum cum deceno, vel millenum cum centeno vel etiam cum deceno et deinceps, – si dividas per quemlibet singularem, id est aut per I, aut per II et deinceps, sumes eum numerum, qui ab eodem singulari divisore differet, ad denarium supplendum et per eum multiplicabis, quem sumperis dividendum. Si tantum unus singularis remaniserit, pones eum in digitis et decenum in articulis, iterumque articulum per eandem differentiam multiplicabis, digitos vero digitis aggregabis et hoc tandiu facies, donec artikuli deficiant. Tunc digitos colliges, et si artikuli iteruj ex hac collectione provenient, diminues, ut supra, usque ad solos digitos. Hoc tantum memor esto, ut millenus habeat articulos in millenis, digitos in centenis, centenus articulos in centenis, digitos in decenis, decenus articulos in decenis, digitos in singularibus. Idem faciedum est in majoribus. Et articulos, a quibus denominationes fiunt, conservabis ad ostendum, quoties divisor sit in dividendo. Et primi quidem artikuli sint in summa dividendis proxima ac infra, augmentati in alios dividendorum obtineat sedes, per divisores pro unitate computentur.*"

Gerbert of Aurillac and abacistic skill of calculation

The paper deals with the early medieval abacus. The famous scholar Gerbert of Aurillac, teacher of kings and emperors, abbot, archbishop and Pope Sylvester II, is frequently connected with the reintroduction of the abacus to the Christian West at the end of the 10th century. For that reason the early medieval form of the abacus is often named “gerbertian” or “cloistral.” The paper describes the “gerbertian” abacus, including an explanation of the key terms needed for this kind of the calculation (*arcus pythagorei*, *digitus*, *articulus*, *numerus simplex, numerus complex*, etc.), the performance of notable mathematicians of this epoch (also called *gibercisti* or *abacisti* – for example Abbo of Fleury, Heriger of Lobbes, Byrhtferth of Ramsey, Hermannus Contractus, Turchillus Compotista, Robert of Hereford, Radulph of Laon, Adelard of Bath, Garlandus Compotista etc.), and the starting point for using Hindu-Arabic numbers in the Latin West (Gerbert’s study in the Spanish March, contact with Jews, etc.).

The historical part of the article (sections II–IV) is followed by a second part that deals with abacistic skill of calculation (sections V and VI). Addition (in accordance with early medieval rules of the calculation with help of the abacus), multiplication, and division (the most demanding mathematical operation on abacus) are described. The second part of this paper shows the rules of abacistic operations and points out similarities between “gerbertian” mathematical operations and today’s calculations.

Author’s address:
Filozofický ústav AV ČR
Jilská 1, Praha
Filozofická fakulta OU v Ostravě
Reální 1476/5, Ostrava