

Pýthagorova tabule v raném latinském středověku¹

MAREK OTISK

Pythagorean board in the Early Latin Middle Ages. This paper deals with a useful mathematical tool called ‘mensa pythagorica’ or ‘abacus’. Mathematicians of the Latin Christian West used this tool most extensively from the end of 10th century to the 12th century. This article analyzes two descriptions of this tool in two texts written around the year 1000 and also presents eight images of the abacus from the manuscripts of this epoch – i.e. from the end of the 10th century to the beginning of 12th century.

Keywords: abacus • mathematics • calculations in the Early Christian Latin World

I

Aritmetika, tj. nauka o čísle a jeho vlastnostech, resp. disciplína mající za svůj předmět abstraktní kvantitu, a zároveň v podobě praktického počtářství také učení o základních operacích s čísly,² byla ve středověku namnoze chápána jako základní vzor dokonalého řádu, který nejvyšší moudrost vložila do všeho stvořeného.³ Povahu jakéhokoli jsoucna lze vyjádřit číslem nebo číselným vztahem, který je rovněž základem lidské racionality⁴ a v tomto ohledu je zároveň tím, co přibližuje člověka k Bohu, neboť samotný Nejvyšší vše uspořádal (podle biblického

¹ Studie vznikla v rámci projektu SGS02/FF/2015 *Středověké prameny – úskalí jejich interpretace a přístupnosti III*, řešeném na Filozofické fakultě Ostravské univerzity v Ostravě.

² Viz např. Flavius Magnus Aurelius CASSIODORUS. *Institutiones divinarum et humanarum litterarum* II, 4, 2. R. A. B. MYNORS (ed.). Oxford, Clarendon Press, 1961, s. 133; nebo ISIDOR ze Sevilly. *Etymologiae I–III / Etymologie I–III*, III, praef. Přeložil D. Korte. Praha, OIKOYMENH, 2000, s. 280–281.

³ Srov. např. Aurelius AUGUSTINUS. *In Ioannis evangelium tractatus CXXIV* I, 13. R. Willems (ed.). *CCSL*, 36. Turnhout, Brepols, 1954, s. 8; nebo Anicius Manlius Torquatus Severinus BOETHIUS. *De institutione arithmetica* I, 2. H. OOSTHOUT – J. SCHILLING (eds.). *CCSL* 94A. Turnhout, Brepols, 1999, s. 14.

⁴ ISIDOR ze Sevilly. *Etymologiae*, c. d., III, 4, 4, s. 286.

verše) podle čísla, míry a váhy.⁵ Také z těchto důvodů aritmetika zastávala výjimečné postavení mezi svobodnými uměními a byla považována za první z věd kvadrivia,⁶ jejíž role je srovnatelná s logikou (dialektikou) v rámci umění trivivia.⁷

Vedle biskupů Augustina z Hippo Regia či Isidora ze Sevilly nebo nositelů titulu *magister officiorum* Boethia a Cassiodora se o vnímání specifické role aritmetiky v souboru svobodných umění zasloužil také Martianus Capella, jehož encyklopedický spis *De nuptiis Philologiae et Mercurii* se dočkal ve středověku výrazného rozšíření a četných komentářů.⁸

V Martianově podání je aritmetika ctihodnou, důstojnou a sebevědomou pannou, která svým vzezřením a vystupováním ohromuje bohy přítomné na svatbě Merkura a Filologie. Žádá po bozích, aby uznali, že je jejich matkou a skutečnou rodičkou, a uznání se jí od nebešťanů dostává.⁹ Zatímco ostatní její sestry (svobodná umění) si ke svému představení na svatebním shromáždění bohů přinesly nejrůznější pomůcky a přístroje (např. gramatika jako léčitelka a opravovatelka nedostatků v jazyce přichází mj. s malým nožem a barevným inkoustem;¹⁰ bystrá dialektika zase s jedovatým hadem a s ostrými háky pokrytou tabulí, jež společně spolehlivě polapí každého, kde nebude dbát jejich přísných pravidel;¹¹

⁵ *Nova Vulgata*. Bibliorum Sacrorum Editio. URL: http://www.vatican.va/archive/bible/nova_vulgata/documents/nova-vulgata_index_lt.html [2015-01-30], *Sap.* 11, 20: „*Sed omnia in mensura et numero et pondere disposuisti.*“ *Bible*. Český ekumenický překlad. URL: <http://www.bible.net.cz/app/b/Wis/chapter/11> [2015-02-14], *Mdr.* 11, 20: „Ale ty jsi všechno uspořádal s mírou, počtem a váhou.“

⁶ BOETHIUS. *De institutione arithmetica* I, 1, c. d., s. 12–13 nebo CASSIODORUS. *Institutiones* II, 4, 1, c. d., s. 132.

⁷ Srov. např. Raffaella FRANCI. L'insegnamento dell'aritmetica nel Medioevo. In Raffaella FRANCI – Paolo PAGLI – Laura Toti RIGATELLI (eds.). *Itinera mathematica. Studi in onore di Gino Arrighi per il suo 90° compleanno*. Siena, Università di Siena, 1996, s. 12–13.

⁸ Na představení spisu viz např. Katarina PETROVIČOVÁ. *Martianus Capella. Nauky „na cestě“ mezi antikou a středověkem*. Brno, Host, 2010; na vliv, komentáře a glosy k Martianově encyklopedickému dílu v raném středověku viz např. Cora Elizabeth LUTZ. *Martianus Capella*. In Paul Oskar KRISTELLER (ed.). *Catalogus translationum et commentariorum: Mediaeval and Renaissance Latin Translations and Commentaries*. Vol. 1. Washington, Catholic University of America Press, 1960, s. 368–376.

⁹ MARTIANUS Capella. *De nuptiis Philologiae et Mercurii* VII, 730. J. Willis (ed.). Leipzig, Teubner, 1983, s. 262.

¹⁰ Tamtéž, III, 224, s. 60.

¹¹ Tamtéž, IV, 328, s. 106.

bojovné a okrášlující rétorice nechybí zbraně a drahokamy;¹² geometrie, velká cestovatelka a měřitelka Země i nebe, s sebou přináší mapy, glóby, měřítka a rovněž abakus;¹³ blyštivá astronomie přichází s rozměrným přístrojem a knihou se záznamy pohybů nebeských těles;¹⁴ vše uklidňující harmonie třímá rozličné hudební nástroje¹⁵), aritmetika ke svému božskému umění nepotřebuje více než své vlastní prsty a početní tabulku, abakus, který před bohy přinesla již geometrie a ponechala ho i pro vystoupení své sestry aritmetiky.¹⁶

Abakus (později ve středověku nazývaný *mensa pythagorica*) není Martianem podrobněji popsán. Dovídáme se pouze, že se jedná o tabuli, která byla patrně posypána prachem¹⁷ a na níž se patrně mohly rýsovat geometrické obrazce (proto abakus přináší geometrie) či zaznamenávat číselné údaje. Zdá se tedy, že Capella měl na mysli určitou variantu římského abaku, která však nemá stejné využití jako pozdější sloupcový abakus z 10.–12. století, což nepřímou dokládá i tvrzení, že z období mezi 7. a 9. stoletím nemáme další jednoznačné reference o této početní pomůcce a je otázkou, nakolik byla (či spíše nebyla) v latinském křesťanském prostředí aktivně používána.¹⁸ Leč v poslední čtvrtině 10. století došlo k výrazné změně, neboť v tehdejších klášterních a katedrálních školách se na modifikovaném abaku postupně začalo pracovat, dochovaly se písemné zmínky o kalkulacích na abaku,¹⁹ vznikly první texty o počítání na deskovém abaku a v rukopisech se zachovala vyobrazení této početní tabulky.

Právě Pýthagorova tabule (tedy pomůcka k provádění praktické aritmetiky) a její podoba v latinském předscholastickém středověku bude hlavním předmětem zájmu této studie. S využitím dvou nejstarších dochovaných popisů početní tabulky (od Richera z Remese a Bernelia mladšího z Paříže) a patrně všech dosud známých nejstarších vyobrazení abaku v latinských středověkých rukopisech

¹² Tamtéž, V, 426, s. 148.

¹³ Tamtéž, VI, 579–582, s. 203–204.

¹⁴ Tamtéž, VIII, 811, s. 307.

¹⁵ Tamtéž, IX, 909–910, s. 347.

¹⁶ Tamtéž, VII, 725, s. 259; resp. VII, 729, s. 261.

¹⁷ Blíže viz tamtéž, VI, 579, s. 204; resp. VI, 706, s. 251.

¹⁸ Přestože v rámci komentářů k Martianovu dílu se o abaku hovoří – viz např. REMIGIUS Autissiodorensis. *Commentum in Martianum Capellam, libri III–IX*. C. E. Lutz (ed.). Leiden, Brill, 1965, s. 21.

¹⁹ Viz např. WALTHER von Speyer. *Libellus de studio* I, v. 169–173. K. STRECKER (ed.). *MGH Poetae*. T. 5/1. Leipzig, Karl W. Hiersemann, 1937, s. 22 nebo NOTKER der Deutsche. *Die Werke Notkers des Deutschen*. Bd. 1: *Notker latinus zu Boethius, „De consolazione Philosophiae“ – Buch I/II*. P. W. TAX (ed.). Tübingen, Walter de Gruyter, 1986, s. 19–20.

(datovaných mezi konec 10. a počátek 12. století) bude učiněn vůbec první pokus o srovnání těchto nejstarších nárysů abaků latinské provenience a dále bude detailně představena samotná aritmetická pomůcka, která ve své době fascinovala řadu vzdělanců a jež je už v dobových textech označována jako gerbertovský abakus (tj. podle civilního jména papeže Silvestra II.) a vzhledem k jeho častému používání v klášterních školách se mnohdy hovoří o tzv. klášterním abaku.

Po krátkém historickém exkurzu bude pozornost věnována zejména popisu a rozboru jednotlivých částí abaku (sloupce, oblouky, paralelní linie, symboly číslic atp.), přičemž hlavní zřetel bude kladen na dochovanou podobu deskriptivní a vyobrazení těchto početních pomůcek z konce 10. a z počátku 11. století a jejich vzájemné komparace. Chybět nebude ani pokus o vysvětlení doplňujících informací, které se v rukopisech dochovaly na těchto matematických tabulkách. Jelikož abakus sloužil především k vlastním početním úkonům, stranou dalšího zájmu tohoto textu zůstanou jiné role aritmetiky či číselných hodnot (symbolický význam čísel, přesahy do metafyziky atp.).

II

Z poslední třetiny 10. století máme zjevné doklady, že se v tehdejší raně středověké Evropě začíná opětovně používat abakus. Tradičně se za hlavního iniciátora oživení zájmu o tuto početní pomůcku považuje Gerbert, remešský učitel a tamní nelegitimní arcibiskup, zároveň opat z Bobbia, později pak ravenenský arcibiskup a pod jménem Silvestr II. papež. Gerbert sepsal (patrně kolem roku 980) stručný spis *Regulae de numerorum abaci rationibus*,²⁰ který zaslal svému příteli Konstantinovi do kláštera ve Fleury. Nedlouho nato (podle některých výkladů možná o pár let dříve²¹) referoval o početních úkonech na abaku i Konstantinův mnišský bratr ve Fleury a pozdější tamní opat Abbo (*In calculum Victorii commentario*).²²

²⁰ GERBERTUS Aurillacensis. *Regulae de numerorum abaci rationibus*. In *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica (972–1003)*. N. BUBNOV (ed.). Berlin, R. Friedländer und Sohn, 1899, s. 1–22. K dataci viz např. Harriet Pratt LATTIN. *The Letters of Gerbert with his papal privileges as Sylvester II*. New York, Columbia University Press, 1961, s. 46.

²¹ Srov. Werner BERGMANN. *Innovationen im Quadrivium des 10. und 11. Jahrhunderts. Studien zur Einführung von Astrolab und Abakus im Lateinischen Mittelalter*. Stuttgart, F. Steiner Verlag, 1985, s. 180.

²² ABBO of Fleury and Ramsey. *Commentary on the Calculus of Victorius of Aquitaine*, III, 64–67. A. M. Peden (ed.). Oxford, British Academy, 2003, s. 113–115; srov. ABBO Floriacensis. *Excerpta ex Abbonis scolastici Floriacensis in calculum Victorii commentario*.

Zřejmě ještě stále v prvním miléniu vznikly i další texty o početních operacích na abaku, které jsou povětšinou komentářem či doplněním Gerbertových *Regulí*.²³ Kolem roku 1000 pak Gerbertovi (pravděpodobně spíše nepřímí) žáci Heriger z Lobbes (*Regulae numerorum super abacum a Ratio numerorum abaci*)²⁴ a Bernelius mladší z Paříže (*Liber abaci*)²⁵ sestavili delší texty o abaku a jeho užívání.

Vedle několika anonymních spisků²⁶ se v první polovině 11. století abacistická literatura rozrůstá např. o pojednání uzavírající první knihu tzv. pseudo-Boethiovy *Geometrie II*²⁷ nebo o stručné texty Heřmana z Reichenau (*Qualiter multiplicationes fiant in abaco*)²⁸ a arcibiskupa Vavřince z Amalfi (*De divisione*).²⁹ V dalším průběhu 11. a na počátku 12. století se počet abacistů a abacistických pojednání navyšuje. Jmenovat lze alespoň Garlanda Komputistu (*De abaco*),³⁰ Radulfa z Laonu (*Liber de abaco*),³¹

In *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, c. d., s. 197–203, resp. TÝŽ. Abbonis abacus. Tamtéž, s. 203–204.

²³ Viz Incertus abacista s. X: De minutis. Tamtéž, s. 225–244.

²⁴ HERIGERUS Lobiensis [Gerbertus Aurillacensis]. Regula de abaco computi. In *Œuvres de Gerbert, pape sous le nom de Sylvestre II*. A. OLLERIS (ed.). Paris – Clermont-Ferrand, Dumoulin – Thibaud, 1867, s. 311–348; srov. také HERIGERUS Lobiensis. Regulae de numerorum abaci rationibus. In *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, c. d., s. 208–221; resp. TÝŽ. Ratio numerorum abaci secundum Herigerum. Tamtéž, s. 221–225.

²⁵ BERNELIN, élève de Gerbert d'Aurillac. *Libre d'Abaque*. B. BAKHOUCHE (ed.). Pau, Princi Néguer, 1999.

²⁶ Viz např. *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, c. d., s. 245–284; nebo mylně Odovi z Cluny připisovaný text – viz ODO Cluniacensis [?]. *Regulae Domni Odonis super abacum (Opuscula de musica)*. In *Patrologia Latina* 133, c. 807–814; dále viz také Balthasar BONCOMPAGNI. Scritti inediti relativa al calcolo dell' abaco. *Bollettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, 10, 1877, s. 595–656.

²⁷ Menso FOLKERTS. „Boethius“ *Geometrie II. Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters*. Wiesbaden, Franz Steiner, 1970, s. 137–144.

²⁸ HERMANNUS Contractus. *Qualiter multiplicationes fiant in abaco*. P. TREUTLEIN (ed.). *Bollettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, 10, 1877, s. 643–647.

²⁹ LAURENTIUS Amalfitanus. *De divisione*. F. NEWTON (ed.). *MGH QQ zur Geistesgeschichte*. T. 7. Weimar, Hermann Böhlau Nachfolger, 1973, s. 76–80.

³⁰ GARLANDUS Compositista. *De abaco*. P. TREUTLEIN (ed.). *Bollettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, 10, 1877, s. 595–607.

³¹ RADULPHUS Laudunensis. *Liber de abaco*. A. NAGL (ed.). *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, 5, 1890, s. 85–133.

Adelarda z Bathu (*Regule abaci*)³² či Turchilla Komputistu (*Reguncule super abacum*).³³ Jistě ne náhodou se v průběhu 12. století stal termín *abacus* fakticky synonymem pro aritmetické výpočty, jak dokládá název slavného díla Leonarda Pisánského *Liber abaci*, které však o počítání na abaku vůbec nepojednává.

Před časem se analýzou těchto textů W. Bergmann pokusil rozlišit tři základní chronologicky na sebe navazující skupiny abacistických traktátů, když se zaměřil především na používání západoarabských (tzv. *ghubar*, tj. písek či prach, podle toho, do čeho byly číslice zapisovány) a řeckých číslic v těchto textech. Do první kategorie zařadil nejstarší předscholastické spisy o abaku (Gerbert, Abbo, Heriger a Heřman), v nichž podle Bergmanna nelze najít žádný arabsko-muslimský vliv, a tudíž v nich chybí i odkazy na arabské číslice. Ve druhé skupině textů (např. Bernellius a pseudo-Boethiova *Geometrie II*) se již objevují společně s řeckými číslicemi i číslice západoarabské, ale při vlastním popisu matematických úkolů se používají číslovky nebo častěji tradiční římské číslice. Teprve ve třetím okruhu textů (např. Garlandus, Radulf, Turchill nebo Adelard) dochází k plnému přijetí arabských číslic i jejich názvů a ty se objevují i v popisu samotných počtářských příkladů.³⁴

Bergmannův výklad se stal zřetelným impulsem pro další zájem o historické přezkoumání vlastního uvedení početní tabulky do raně středověké Evropy, především pak s ohledem na rukopisně dochovaná vyobrazení abaku. Výsledky těchto výzkumů³⁵ následně vedly k nutnosti přehodnotit nejen Bergmannovu klasifikaci, ale také rehabilitovaly konec 10. století jako dobu, kdy se v Evropě počíná používat arabských číslic, byť velmi pravděpodobně pouze při výpočtech na abaku, a znovu se tak vrátila do popředí zájmu hypotéza o Gerbertově iniciační roli, který se s *ghubar* číslicemi mohl seznámit během svého pobytu za

³² ADELARDUS Bathoniensis. *Regule abaci*. B. BONCOMPAGNI (ed.). *Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, 14, 1881, s. 1–134.

³³ TURCHILLUS Compotista. *Reguncule super abacum*. E. Narducci (ed.). *Bolletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, 15, 1882, s. 111–163.

³⁴ Werner BERGMANN. *Innovationen im Quadrivium des 10. und 11. Jahrhunderts*, c. d., s. 205–206.

³⁵ Viz např. Menso FOLKERTS. Frühe Darstellungen des Gerbertschen Abakus. In Raffaella FRANCI – Paolo PAGLI – Laura Toti RIGATELLI (eds.). *Itinera mathematica*, c. d., s. 23–43; Menso FOLKERTS. The names and forms of the numerals on the abacus in the Gerbert tradition. In Flavio G. NUVOLONE. *Gerberto d'Aurillac da Abate di Bobbio a Papa dell'Anno 1000. Atti del Congresso internazionale*. Bobbio, A. S. B., 2001, s. 245–265 nebo Charles BURNETT. The Abacus at Echternach in ca. 1000 A. D. *SCLAMVS*, 3, 2002, s. 91–108.

Pyrenejemi.³⁶ Také proto se v dalším výkladu tento článek zaměří jen na dva nejstarší popisy abaku, které vznikly před rokem 1000, nejspíše kolem tohoto roku, a na několik nejstarších dochovaných nárysů abaku.

III

Z textů se konkrétně jedná o biografickou pasáž z historického spisu *Historiarum libri quattuor* Richera z Remeše, Gerbertova přítele, možná žáka, spolupracovníka a později patrně i kritika, který část třetí knihy svých dějin věnoval budoucímu papeži Silvestru II. Richer se ve svém díle, které sepsal ve druhé polovině 90. let 10. století,³⁷ relativně detailně pozastavuje u Gerbertova pedagogického působení v Remeši, když v jednotlivých kapitolách probírá zdroje, pomůcky i vlastní Gerbertův výukový proces, jak ho praktikoval v jednotlivých svobodných uměních.³⁸ Na samotný závěr tohoto pojednání popisuje i podobu Gerbertem užívaného abaku.

Rovněž druhý text je explicitně vázán na Gerbertovu osobnost, přestože o jeho autorovi Berneliu juniorovi z Paříže toho víme velmi málo.³⁹ Takřka celou předmluvu svého spisu Bernelius pojal jako chvalozpěv na Gerbertovo abacistické umění⁴⁰ (označení *papež Gerbert* je hlavním důvodem datace tohoto pojednání mezi roky 999 a 1003⁴¹) a podobu početní tabulky podrobně popisuje hned na úvod první knihy svého traktátu.

Podle Richera Gerbert zhotovil (za pomoci výrobce štítů) v Remeši abakus, který byl používán k výuce geometrie. Tato rozměrná deska byla rozdělena do

³⁶ Viz RICHERUS Remensis. *Historiarum libri III*, III, 43. H. HOFFMANN (ed.). *MGH SS. T. 38*. Hannover, Impensis Bibliopolii Hahniani, 2000, s. 191–192 nebo ADEMARUS Cibardi. *Historiarum libri III*, III, 31. D. G. WAITZ (ed.). *MGH SS. T. 4*. Impensis Bibliopolii Hahniani, 1841, s. 130.

³⁷ K osobnosti autora i dataci spisu viz zejména Jason GLENN. *Politics and History in the Tenth Century. The Work and World of Richer of Reims*. Cambridge, Cambridge University Press, 2004.

³⁸ RICHERUS Remensis. *Historiarum libri III*, c. d., III 46–54, s. 193–198.

³⁹ Viz např. BERNELIN. *Libre d'Abaque*, c. d., s. 9; Werner BERGMANN. *Innovationen im Quadrivium des 10. und 11. Jahrhunderts*, c. d., s. 199; Uta LINDGREN. *Gerbert von Aurillac und das Quadrivium. Untersuchungen zur Bildung im Zeitalter der Ottonen*. Wiesbaden, F. Steiner, 1976, s. 46 ad.

⁴⁰ BERNELIN. *Libre d'Abaque*, c. d., praef., s. 16–18.

⁴¹ Viz např. Menso FOLKERTS. The names and forms of the numerals on the abacus in the Gerbert tradition, c. d., s. 249.

27 sloupců (*partes*), do nichž se vkládaly žetony se symboly (*notae, characteres*) devíti číslic. Žetonů vyrobených z rohoviny bylo na tisíc a jejich umístěním do požadovaných sloupců bylo možné vyjádřit hodnotu jakéhokoli čísla (fakticky tedy hodnoty od 10^0 do 10^{26}).⁴²

Richerův stručný popis poskytuje určitou představu o Gerbertem užívaném abaku. Detailnější informace však nabízí Bernelius. Podle jeho spisu *Liber abaci* má počtářská deska 30 sloupců (*lineae*), přičemž první tři zprava jsou určeny pro zlomkové výpočty a zbylých sedmadvacet sloupců slouží pro počty s celými čísly, tzn. podobně jako v Richerově popisu i zde umožňuje abakus zachytit hodnoty čísel od 10^0 do 10^{26} . Každé tři sloupce jsou společně zakončeny velkým obloukem,⁴³ který má v sobě ještě další dva oblouky – větší, který zahrnuje druhý a třetí sloupec zprava v dané trojici, a menší, který zastřešuje první sloupec zprava v každé trojici sloupců.⁴⁴

Každý sloupec vyjadřuje jeden desetinný řád a toto členění pomocí oblouků má zaručit snadnější orientaci na velké pracovní desce. Právě proto jsou sloupce doplněny o písmena, která mají vysvětlit hodnotu sloupců v rámci jednoho velkého oblouku, tj. v rámci tří řádů desítkové poziční soustavy. Nad třetím sloupcem zprava se nachází písmeno *C* (tj. zkratka za *centenus*, tj. stovky), čímž se naznačuje, že v dané pozici se bude jednat o hodnoty stovek (např. stovky miliónů, stovky biliónů atp.). Druhý sloup zprava je nadepsán písmenem *D* (tj. zkratka za *decenus*, tj. desítky), což počtáři dává ihned informaci, že v dané trojici pozičních sloupců půjde o hodnoty desítek (např. desítky tisíců, desítky miliard atp.). Nad první sloupec zprava jsou připsána hned dvě písmena. Nejprve je to *M* (tj. zkratka za řecké *monas*, tj. jednotka), tudíž je označením sloupce pro jednotky (*unitates*), tzn. např. tisíce, kvadriliony atp. Jelikož při popisu jednotlivých řádů na celém abaku písmeno *M* často označuje tisíce (tj. *milia*), doplňuje Bernelius k *M*, jež má určovat jednotky v rámci tří sloupců (nikoli tisíce, které v trojici sloupců nejsou přítomny) ještě písmeno *S* (tj. *singulares*), které rovněž upozorňuje, že se jedná o jednotky.⁴⁵

Následně Bernelius představuje všechny sloupce abacistické tabule, v nichž se počítá s celými čísly, a předvádí jejich označení, jež vyjadřují jednotlivé řády v poziční soustavě od hodnot 10^0 do 10^{26} . Postupuje zprava doleva a sloupec pro jednotky je nadepsán písmenem *I*, sloupec pro desítky *X*, pro stovky *C* (tj. z římského označení jedničky, desítky a stovky), pro tisíce *I* s vodorovnou

⁴² RICHERUS Remensis. *Historiarum libri III*, c. d., III, 54, s. 198.

⁴³ Později se těmto obloukům říká *arcus Pythagorei*.

⁴⁴ BERNELIN. *Libre d'Abaque*, c. d., I, s. 21–22.

⁴⁵ Tamtéž, s. 22–23.

čárkou (*titulus*) nad římskou číslicí, tj. \bar{I} (v dalším popisu je již hodnota tisíců, milionů atp. značena pomocí zmiňovaného \bar{M}), pro desetitisíce \bar{X} atd. až po sedmadvacátý sloupec, který je nadepsán $\bar{C} \bar{M} \bar{M} \bar{M} \bar{M} \bar{M} \bar{M} \bar{I}$ (podrobněji viz tab. 2 níže).⁴⁶

Ovšem abakus není v Berneliově popisu členěn pouze vertikálně do třiceti sloupců, ale pomocí horizontálních linek také do čtyř vodorovných částí (*spatia*), které jsou nazvány první až čtvrtá (shora dolů).⁴⁷ Podobně jako oblouky či pomocná písmena pro jednotlivé sloupce i toto členění má především usnadnit práci na abaku, aby se v různých částech desky mohly provádět různé početní operace, zejména pak pomocné a doplňkové výpočty pro daný matematický úkon, resp. jako prostor pro zachování průběžných výsledků atp.

Ve shodě s Richerovým popisem Gerbertova abaku i Bernelius pokračuje představením symbolů číslic (*characteres, figurae*), s nimiž se na abaku pracuje. Číslice vždy uvádí latinským termínem, načež následuje indoarabský symbol číslice (tzv. *ghubar*) a řecká číslice (podrobněji viz tab. 1).⁴⁸

Richerova stručná poznámka i Berneliův podrobnější popis evidentně odkazují na velmi podobnou či přímo stejnou pomůcku. Jediným výraznějším rozdílem je to, že Gerbert patrně nepočítal na abaku se zlomky, čímž lze vysvětlit chybějící první tři sloupce zprava. Richer také mlčí o horizontálním dělení abaku a podrobněji nepíše ani o pomocných označeních jednotlivých sloupců písmeny, což by mohlo být dáno stručností jeho výkladu.

Pravděpodobně ve stejné době jako Berneliův text sepsal svá pojednání o abaku také Heriger z Lobbes. Ten ale abacistickou desku nepopisuje, byť ve svých pravidlech počítání na abaku uvádí označení všech sedmadvaceti řádů, jak ukazuje tab. 2.

IV

Dobových vyobrazení klášterního nebo gerbertovského abaku známe hned několik. Nejstarší náčrty početních tabulí jsou ještě z konce 10. století a za jeden z prvních je považován tzv. abakus z Echternachu [E] (viz obr. 1), jehož původ se klade do posledních let před zlomem milénia.⁴⁹ Tento abakus se dochoval ve dvou rukopisech, jednou jako samostatný arch vložený do bible vzniklé

⁴⁶ Tamtéž, s. 23–24.

⁴⁷ Tamtéž, s. 24–25.

⁴⁸ Tamtéž, s. 25.

⁴⁹ Jeho popis, dataci i fotokopii viz Charles BURNETT. The Abacus at Echternach in ca. 1000 A. D., c. d., s. 91–108.

v 11. století (Luxemburg, Bibliothèque nationale de Luxembourg, MS 770), podruhé jako součást většího rukopisu z Echternachu, dnes uloženého v nedalekém Trevíru (Trier, Stadtbibliothek, MS 1093/1694, fol. 197r). Obě kresby abaku jsou velmi podobné (trevírácká verze neobsahuje horizontální dělení abaku, drobně se liší ztvárnění některých číslic a označení desetinných řádů), takže lze hovořit o totožném původu obou nárysů. Abakus z lucemburského Echternachu má 27 sloupců (varianta na vloženém archu je oříznutá a první tři pravé sloupce v dochovaném exempláři chybí), každý z nich je označen příslušným číselným řádem v decimálním způsobu zápisu čísel (od milionů, tj. 10^6 , po desítky bilionů, tj. 10^{13} , je uveden i zápis ve stovkách tisíců). Sloupce jsou ukončeny oblouky, které zahrnují vždy tři desetinné řády (jednotky až stovky, tisíce až statisíce atd.), uvnitř těchto oblouků jsou pro snadnější orientaci vepsány menší oblouky – jeden menší vždy pro jednotky, tisíce, miliony atd. a druhý větší, který zastřešuje zbylé dva řády uvnitř třísloupcového oblouku, tzn. přesně tak, jak to popisoval Bernellius. Všechny nejmenší oblouky jsou označeny písmenem *S* (jednotky), nad abakem jsou pak použita písmena *C* (stovky), *D* (desítky) a *M* (jednotky) pro každou trojici sloupců (tato písmena neobsahuje trevírácká varianta). Uvnitř nejmenších oblouků jsou uvedeny západoarabské číslice *ghubar* a verze z archu člení abakus také horizontálně na čtyři části.

Ve stejné době, tj. na samotném sklonku 10. století, zřejmě vznikl i abakus **[B]**, jímž počíná bernský matematický a komputistický rukopis (Bern, Burgerbibliothek, MS 250, f. 1r). Tato početní tabule (viz obr. 2) je zřejmě nejlépe dochovaným funkčním abakem z raného středověku. V mnohém je podobný s **[E]** – rozdělení na čtyři horizontální části, velké oblouky zastřešující vždy tři desetinné řády, které v sobě zahrnují malý oblouk pro jednotky a větší pokrývající řády desítek a stovek, nebo označení písmeny *C*, *D* a *M* nad každou trojicí sloupců. Odlišností je však více.⁵⁰ Celá počtářská deska je uvedena hexametrem, který referuje o tom, že to byl Gerbert, kdo uvedl podobu abacistických číslic (tj. západoarabské číslice zvané *ghubar*) do latinského světa,⁵¹ ale tvary těchto čísel na rozdíl od **[E]** neuvádí. Nejviditelnějším rozdílem je však skutečnost, že **[B]** nemá sedmadvacet sloupců, nýbrž se jedná o třicetisloupcový abakus, v němž se předpokládá, že počtář bude pracovat i se zlomky, pro něž jsou samozřejmě vymezeny první tři sloupce zprava. Tyto sloupce jsou nadepsány symboly pro zlomky (*uncia*,

⁵⁰ Popis i vyobrazení abaku **[B]** nabízí Menso FOLKERTS. *Frühe Darstellungen des Gerbertschen Abakus*, c. d., s. 28, resp. s. 40 nebo Menso FOLKERTS. *The names and forms of the numerals on the abacus in the Gerbert tradition*, c. d., s. 252.

⁵¹ Viz např. Menso FOLKERTS. *Frühe Darstellungen des Gerbertschen Abakus*, c. d., s. 28: „*Gerbertus Latio numeros abacique figuras.*“

scripulus, calcus) a přirozeně nad nimi chybí označení jednotek, desítek a stovek (*M, D a C*). Každý ze zbylých sedmadvaceti sloupců je pak nadepsán desetinným řádem (od 10^0 po 10^{26}) a podobně jako u **[E]** je uvedena i varianta značení desetinných řádů ve statisících, tentokrát je však tento zápis umístěn do druhé horizontální části abaku a postupuje od milionu po stovky kvadrilionů (10^{26}). Ve čtvrté, spodní, paralelní části abaku jsou uvedeny také názvy, symboly a vzájemné poměry mezi zlomky (*as až calcus*). Zdá se, že autor tohoto nákresu musel celé problematice abacistického počítářství velmi dobře rozumět.

To již nelze říci o pařížském abaku **[P]**, který vznikl patrně ve Fleury na počátku 11. století a který se zachoval v astronomicko-abacistickém konvolutu (Paris, Bibliothèque nationale de France, Lat. 8663, f. 49v).⁵² Autor měl patrně záměr vytvořit sedmadvacetisloupcový abakus (tj. bez sloupců pro zlomky), čemuž také odpovídají obvyklé trojice oblouků (jedno-, dvou- a třísloupcové), jejich označení v decimálním způsobu zápisu číselných hodnot (*C, D, S*, resp. *M*, které zde dost možná označuje tisíce jako čtvrtý řád) i nadepsání jednotlivých řádů. S výjimkou prvních tří sloupců (jednotky až stovky) se však autor nevyhnul omylu, když místo potřebných čtyřadvaceti dalších sloupců pro jednotlivé desetinné řády jich narýsoval pouze 16 – vždy místo tří sloupců nakreslil jen dva (viz obr. 3). Takto se celá početní pomůcka stává značně nepřehlednou a fakticky nepoužitelnou, na čemž nic nemění ani uvedení symbolů arabských číslic v nejmenších obloucích v záhlaví celého abaku.

První dochovaný abakus **[G]**, který je zároveň součástí textového pojednání o počítání na této pomůcce, tvoří obrazový doplněk abacistické kapitoly tzv. pseudo-Boethiovy *Geometrie II* neznámého autora patrně lotrinského původu (viz obr. 4).⁵³ Na rozdíl od předchozích abaků má pouze dvanáct sloupců (od řádu jednotek po stovky miliard, tj. 10^{11}), každý řád je ukončen vlastním malým obloukem a v deseti z nich jsou zapsány všechny západoarabské číslice a tzv. *sipos*. Nad oblouky je slovně uvedeno pojmenování všech deseti nových symbolů. Zatímco **[E]** a **[P]** představují devět symbolů číslic (*de facto* totožných s prvními devíti zprava v **[G]**), obsahuje pseudo-Boethiova *Geometrie I* i tzv. *sipos*, zdánlivě připomínající naši nulu. Ta však na abaku nebyla zapotřebí: Kde bychom dnes cítili nutnost napsat nulu, např. v čísle 507, tam prostě abacista nechal volný

⁵² Detaily i fotokopie tohoto abaku nabízí Menso FOLKERTS. *Frühe Darstellungen des Gerbertschen Abakus*, c. d., s. 28–29, resp. s. 41, nebo Menso FOLKERTS. *The names and forms of the numerals on the abacus in the Gerbert tradition*, c. d., s. 252–253.

⁵³ Podrobně, včetně rukopisných fotokopií, viz Menso FOLKERTS. „*Boethius*“ *Geometrie II*, c. d., s. 83–94, resp. Taf. 1–21.

slopec na abaku, tzn. vložil symbol pro pětku (*quinas*, resp. *quimas*) do sloupce pro stovky (C) a symbol pro sedmičku (*zenis*) do řádu jednotek (I). *Sipos* tedy nepředstavuje nulu, nýbrž pomocnou značku, kterou si abacista na početní tabulce označoval místo, kde počítal. Dále je tento abakus rozdělen paralelními linkami na čtyři části, v horní je tradičně uvedeno označení jednotlivých desetinných řádů. V souhrnu platí, že toto vyobrazení je primárně ilustrací k textu, má tedy osvětlující roli pro čtenáře pojednání a patrně se nejednalo o pomůcku, na níž by měl počtář aktivně provádět matematické operace.⁵⁴

V mnohém se zdá být pseudo-Boethiovým abakem inspirován i vatikánský abakus [V] (viz obr. 5), který je součástí závěrečné matematicko-abacistické vsuvky rukopisného souboru vědeckých textů (Vatikan, Lat. 644, f. 77v–78r). Rukopis je datován do 10. století, ale poslední folia, na nichž se nachází kresba abaku, jsou z 11. století.⁵⁵ Ve shodě s [G] uvádí i tato matematická pomůcka pojmenování a symboly tzv. *ghubar* číslic (včetně pomocné známky *sipos*, která je zde vtěsnána do jednoho sloupce spolu s devítkou patrně proto, aby nedošlo k záměně např. s nulou nebo desítkou) a je určena pro počítání do stovek miliard (tj. 10^{11}), tzn. zachycuje pouze 12 sloupců. Zdá se, že autor vyobrazení měl opětovně s tématem trochu potíže (podobně jako kreslíř [P]) a dodatečně dokreslil třináctý sloupec pro počítání se zlomky, který takto slovně označil. Obvyklé oblouky zastřešující sloupce jsou zde značně netradičně vepsány do samotných sloupců a to navíc hned třikrát (viz obr. 5). V jistém ohledu je však tento abakus nejobsáhlejší – vedle sloupců, včetně označení jednotlivých řádů (často orientaci usnadňující členění pomocí písmen C, D a S/M tentokrát chybí, ve shodě s [G]) a symbolů i názvů arabských číslic, totiž uvádí také hexametru o Gerbertovi z Remeše a jeho vlivu na užívání nových číslic mezi Latínky a dále představuje symboly, názvy i vzájemné poměry mezi zlomky. Hexametru i zlomky se nachází i v [B], zde je však užito částečně odlišné symboliky a hlavně je nesprávně uvedena *siliqua* (podle [V] je to $1/2$ *calcu*, kdežto v obvyklém užívání měla hodnotu $4/3$ *calcu*, neboť představuje hodnotu $1/6$ *scripulu* a *calcus* je $1/8$ *scripulu*). Nepřesně je označena také hodnota *sesuncie*. Jak se zdá, ten, kdo načrtl tento abakus, měl zřejmě jen částečné znalosti popisované matematické problematiky.

⁵⁴ Podobně je tomu např. v matematickém rukopise z 11. století (Montpellier, H 491, f. 76r, resp. f. 79r–v), v němž se mj. nachází Berneliův text *Liber abaci*, kde jsou předvedeny příklady výpočtů na abaku a římské zlomky. Toto vše je zaneseno do ilustrací v podobě abacistických tabulí.

⁵⁵ Podrobnosti, včetně fotokopie a odkazů na edice tamních abacistických pojednání, nabízí Menso FOLKERTS. *Frühe Darstellungen des Gerbertschen Abakus*, c. d., s. 29–30, resp. s. 42, nebo Menso FOLKERTS. *The names and forms of the numerals on the abacus in the Gerbert tradition*, c.d., s. 253.

V průběhu 11. a 12. století vzniklo a dodnes se dochovalo několik dalších nákresů abaků,⁵⁶ v této studii se bude blíže hovořit už jen o čtyřech případech. Z 11. století pochází zřejmě fécampský rukopis, který se dnes nachází v Rouenu (Rouen, Bibliothèque municipale, MS 489, f. 68v–69r) a jehož součástí je nezvykle pouze desetisloupcový abakus **[R]** (viz obr. 6).⁵⁷ Každý ze sloupců je ukončen obloukem, do něhož jsou nad řádové hodnoty v desetinném zápisu čísel slovně i symbolicky zaznačeny západoarabské číslice. Vedle jisté dekorativnosti abaku zaujme i uvedení řeckého způsobu označování čísel (pro hodnoty 1–9, tedy A–Θ). Obdobně jako **[E]**, **[B]** a **[G]** je i tento abakus vodorovně rozdělen na čtyři části.

Ve 12. století byl sestaven rukopis (Paris, Bibliothèque nationale de France, MS Lat. 7231), který shrnuje texty ke svobodným uměním, především k rétorice, a na posledním foliu (85v) se nachází nákras abaku **[Pa]** (viz obr. 7), jehož původ lze hledat v 11. století, dokonce snad v jeho první polovině.⁵⁸ Důvodem je především značná podobnost s abakem **[B]** z konce 10. století. Oba nákresy shodně představují třicetisloupcový abakus, na němž nechybí všechny tři velikosti oblouků zastřešující sloupce, do nichž jsou vepsána písmena C, D, a M/S (u **[B]** chyběla sigla S) a horizontálně jsou děleny do čtyř částí. V první vodorovné části nahoře jsou zcela totožně uvedena označení řádů od 10^0 po 10^{26} (abakus **[Pa]** nemá na rozdíl od **[B]** v prvních třech sloupcích zprava symboly pro zlomky) a u předělu mezi první a druhou vodorovnou částí jsou uvedeny tytéž řády v hodnotách stasisiců (v případě **[Pa]** nad předělem, tj. ve spodní části první sekce, kdežto u **[B]** pod předělem, tj. v horní části druhé sekce). Čtvrtá část pak v obou případech představuje zlomky, jejich názvy (autor abaku **[Pa]** zkomolil pojmenování *sestertius*), symboly (velmi podobné, jen výjimečně se na obou nákresech drobně liší) a vzájemné poměry mezi zlomky. Zde lze také začít s výčtem výraznějších odlišností obou vyobrazení. Zatímco **[B]** uvádí trojí číselné hodnoty *asu* (*uncia*, *duella* a dvakrát *sicilicus*), tak **[Pa]** se zaměřil na *scripulus* a jeho vztah k *asu*, resp. u nižších hodnot ještě přidává vzájemné hodnoty *scripulus*–*obolus* a *obolus*–*cerates*–*calcus*. Abakus **[Pa]** neobsahuje hexametru o Gerbertově uvedení *ghubar* číslic na latinský Západ, zato však přidává u předělu mezi druhou a třetí horizontální částí vyjádření hodnot, které by určovala pětka

⁵⁶ Např. Oxford, St. John's College, MS 17, 41v–42r, dostupné z URL: <http://digital.library.mcgill.ca/ms-17/folio.php?p=41v>; resp. <http://digital.library.mcgill.ca/ms-17/folio.php?p=42r> [cit. 2014-04-25].

⁵⁷ Jeho stručné představení i fotokopii uvádí Menso FOLKERTS. The names and forms of the numerals on the abacus in the Gerbert tradition, c. d., s. 256.

⁵⁸ Viz např. Charles BURNETT. The Abacus at Echternach in ca. 1000 A.D., c. d., s. 92.

daná do daného sloupce, tzn. poloviční hodnoty systémového značení decimálních řádů. Zde se písař dopustil chyby, když ve třetím sloupci zleva (10^{24}) zapsal stejné značení jako u řádových hodnot, nikoli jen polovinu (správně má být $\overline{VCC\overline{CC}}$). Dále u předělu mezi první a druhou horizontální částí, ještě před označením sloupců v hodnotách stovek tisíců, vyjadřuje **[Pa]** hodnoty sloupců pomocí dvojnásobku římské pětky (řády 10^1 až 10^5) a řád jednotek (10^0) jako dvakrát hodnotu *semis*. Další chybou abaku **[Pa]** je zapsání písmen *C*, *D* a *M* i do prvních tří sloupců zprava pro početní úkony se zlomky, kde se decimální hodnoty neužívají. Na závěr je nutno zmínit, že v nejmenších obloucích jsou zachyceny tvary západoarabských číslic, což v **[B]** není přítomno. Zdá se tedy, že náčrt abaku **[Pa]** je silně inspirován **[B]**, ovšem není jen variantou téhož, neboť autor **[Pa]** některé důležité či zajímavé věci doplnil nebo pozměnil, ne vždy však zcela správně.

Posledním rukopisem, o němž zde bude řeč, je komputistický rukopis z oxfordské St. John's College, který vznikl v první čtvrtině 12. století (Oxford, St. John's College, MS 17, 48v–49r) a obsahuje mj. i poměrně zdobně vyvedený sedmadvacetislopcový abakus **[J]**.⁵⁹ Tento abakus je nejmladší ze zde uvedených a představuje velmi precizně vyvedenou pomůcku. Krom sloupců pro počítání se zlomky totiž přináší všechny další návodné informace (viz obr. 8): Každý sloupec je samozřejmě označen hodnotou řádu v decimální soustavě; trojice sloupců (nechybí označení *C*, *D*, *M/S*) je zastřešena oblouky, v nichž jsou (shodně jako u **[E]**, **[B]**, **[P]** a **[Pa]**) zakresleny další dva oblouky – jeden větší přes dva sloupce, druhý menší pro jednotky v rámci dané trojice (jak o tom píše Bernelius); v nejmenším oblouku jsou zapsány západoarabské, řecké i římské číslice, nad tímto obloukem nechybí slovní pojmenování indoarabských číslic. Přestože sloupce pro počítání se zlomky chybí, jsou do spodní části abaku zařazeny římské zlomky, jejich symboly, názvy i některé vzájemné poměry (na rozdíl od **[V]** je zde *siliqua* uvedena správnou hodnotou a přidány jsou i její násobky, tedy *bissiliqua* a *tremissis*).

V tomtéž rukopisu (Oxford, St. John's College, MS 17, f. 35r) nechybí další kresba početní desky, která je nazvána *Abbonis abacus* a jelikož je Abbo z Fleury současníkem nejstarších latinských předscholastických či raně scholastických

⁵⁹ Abakus je dostupný z [www: http://digital.library.mcgill.ca/ms-17/folio.php?p=48v](http://digital.library.mcgill.ca/ms-17/folio.php?p=48v); resp. <http://digital.library.mcgill.ca/ms-17/folio.php?p=49r> [cit. 11. 4. 2014]. Jeho rozbor, výklad, včetně fotokopií, nabízí také G. R. EVANS. *Difficillima et Ardua: theory and practice in treatises on the abacus, 950–1150. Journal of Medieval History*, 3, 1977, s. 21–38 nebo G. R. EVANS. *Schools and scholars: the study of the abacus in English schools c. 980–c. 1150. The English Historical Review*, 94, 1979, s. 71–89.

abacistů a navíc se s jeho jménem poji označení *abaci doctor*,⁶⁰ nezůstane opomenut ani tento tzv. Abbonův abakus (viz obr. 9).⁶¹ Stačí ovšem letmý pohled na tuto kresbu, aby bylo zřejmé, že se v tomto případě nejedná o skutečný abakus. Dvě trojice sloupců jsou sice „abacisticky“ zastřešeny obloukem a zdá se, že sloupce skutečně reprezentují desetinné řády čísel (jednotky až statisíce), čemuž odpovídá i nápis na této tabuli, který upozorňuje, že zde lze vyjádřit čísla po 999 999,⁶² ovšem tím veškerá podobnost s abakem končí. Jednotky jsou umístěny vlevo (nikoli vpravo, jak je tomu na abaku), v jednotlivých sloupcích jsou vepsány (pro zápis čísel nesprávně zleva doprava) číselné hodnoty pro daný řád (pro jednotky 1–9, pro desítky 10–90 atd.), takže celá tabulka připomíná spíše výčet určitých kvantitativních hodnot než abakus. Také další typické pomůcky chybí – rozlišení jednotek, stovek a tisíců pro trojici sloupců, informace o západoarabských číslicích, zlomcích atd. Je tedy zřejmé, že se v tomto případě nejedná o abacistickou pomůcku.

V

Přestože některé z právě představených nákresů abaků zaznamenaly chybné údaje nebo nepřehledné či principiálně nefunkční členění počtářské tabule, je evidentní, že v naprosté většině v zásadě korespondují s Richerovým a Berneliovým popisem této pomůcky. S výjimkou tzv. Abbonova abaku je navíc patrné, že všechny nákresy se snaží maximálně usnadnit počtářskou praxi svým uživatelům nebo čtenářům, byť ne vždy daný autor správně pochopil všechny náležitosti abacistického počtářství. K usnadnění slouží zejména indoarabské symboly číslic (příp. jejich názvy a ekvivalenty v římských a řeckých číslicích), snaha o orientační

⁶⁰ Takto končí jeden z dochovaných rukopisů Abbonova komentáře k Victoriovu spisu – viz ABBO of Fleury and Ramsey. *Commentary on the Calculus of Victorinus of Aquitaine*, c. d., s. xxxviii; srov. ABBO Floriacensis. *Abbonis abacus*. In: *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, c. d., s. 203.

⁶¹ Jeho rozbor, včetně fotokopie nabízí Charles BURNETT. *Abbon de Fleury abaci doctor*. In Barbara OBRIST (ed.): *Abbon de Fleury. Philosophie, sciences et comput autour de l'an mil*. Paris [Oriens-Occidens. Sciences, mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'Age classique 6], 2006, s. 129–139, resp. 211; na elektronickou kopii viz URL: <http://digital.library.mcgill.ca/ms-17/folio.php?p=35r>; c. d.

⁶² Viz ABBO Floriacensis. *Abbonis abacus*. In *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, c. d., s. 203: „*In hac figura descriptus est numerus infinitus: incipit enim ab uno pervenitque usque ad nongentesimum millesimum.*“ Srov. také URL: <http://digital.library.mcgill.ca/ms-17/folio.php?p=35r>.

označení jednotlivých řádů v desítkové poziční soustavě a v neposlední řadě symboly a vzájemné poměry mezi zlomky.

Na závěr této studie lze tedy shrnout základní informace, s nimiž se na nejstarších nákresech abaků a v nejstarších raně středověkých latinských textech o abacistické matematice lze setkat. Především je to prvotní uvedení západoarabských číslic do západního křesťanského světa. Značky pro tyto číslice se v mnoha případech zřetelně lišily, nejvýrazněji to vidět u číslice 3, v rozdílných polohách některých symbolů, což je dáno tím, že žeton se symbolem čísla se do sloupců na abaku mohl klást v jakékoli poloze, takže pro počtáře to nepředstavovalo závažnější komplikaci (viz tab. 1).

Jiným nesnadným úkolem abacistického počtáře bylo zorientovat se na velké tabuli a osvojit si zápis číselných hodnot podle desítkové poziční soustavy. Tuto orientaci mělo usnadnit nadepsání jednotlivých sloupců na abaku římskými číslicemi, které označovaly patřičný řád. Symbolika se ve vyšších řádech nemálo lišila (viz tab. 2), což mohlo být spíše na škodu, ovšem princip značení byl v zásadě totožný. Některé nákreby abaků uvádějí decimální řádovou hodnotu sloupců nejen podle tisíců, milionů atd., ale rovněž ve stovkách tisíců.

Posledním čteně se vyskytujícím pomocníkem abacistického počtáře je souhrn názvů, symbolů a vzájemných poměrů mezi zlomky. Aritmetické operace se zlomky byly spolu s dělením chápány jako vrcholné umění, které zvládal jen zkušený matematik. Usnadnit ho měly zaznačené přehledy (viz tab. 3), které se na počtářské desce mnohdy umísťovaly do spodní části tabule.

Není pochyb o tom, že abacistické počtářství znamenalo výraznou změnu v provozování základních aritmetických operací. Pro tehdejší intelektuály nebylo vůbec snadné se v tematice zorientovat, protože jim nejstarší latinské středověké texty o abaku i nejstarší dochovaná vyobrazení této matematické pomůcky nabízely v mnoha případech návodné informace, které měly práci na abaku co nejvíce objasnit a ulehčit.

Summary

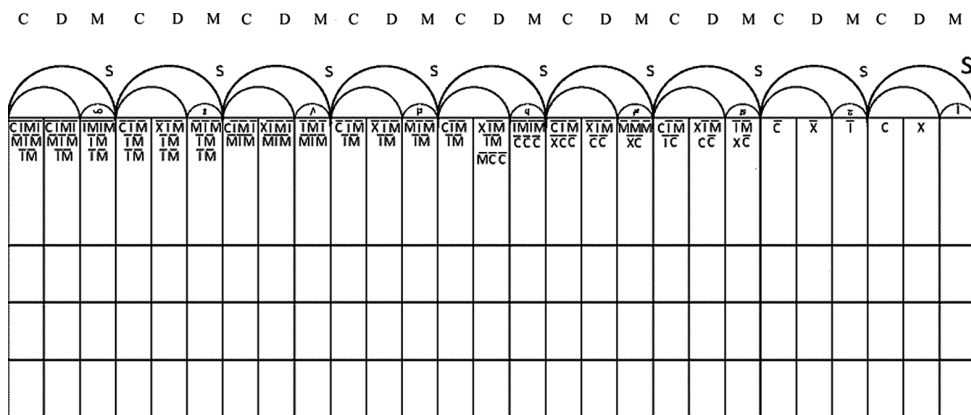
This paper presents the abacus of the Latin pre-scholastic Middle Ages. With the use of the two oldest surviving descriptions of the abacus (by Richer of Reims and Bernelius the younger from Paris) together with the oldest images of the calculating tool preserved in manuscripts from the end of the 10th and beginning of the 12th centuries (so called abacus from Echternach; the abacus from Bern; the abacus from Paris from the beginning of 11th century; abacus from so called pseudo-Boethius *Geometry II*; the abacus from Vatican; the abacus from Rouen; the abacus from Paris from the 11th Century, the abacus from Oxford and so called abacus of Abbo) this article introduces in detail the

arithmetic tool that proved a source of great fascination for many intellectuals in its time.

This text describes and analyzes the individual parts of the abacus, while emphasizing the descriptions and surviving images of this tool and comparing them to each other. Furthermore, the text presents and explains the complementary mathematical information emerging from the images of the abacuses in manuscripts (abacistic symbols and names of numerals, markings of the abacus columns, and symbols of fractions and relations between them).

Author's address:

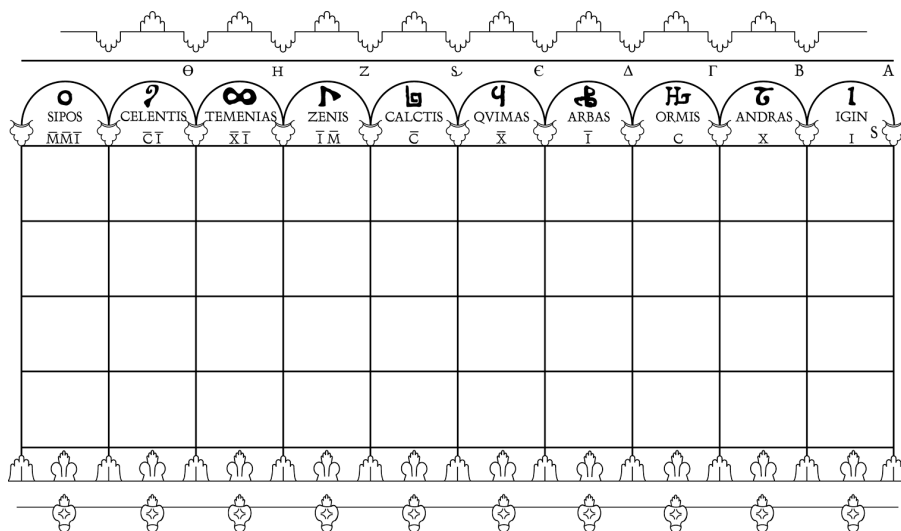
Filozofická fakulta OU v Ostravě, Reální 5, Ostrava
 Filosofický ústav AV ČR, Jilská 1, Praha
 marek.otisk@osu.cz



Obr. 1 – Abakus z Echternachu [E] (asi před rokem 1000); překresleno podle Luxemburg, Bibliothèque nationale de Luxembourg, MS 770 a Trier, Stadtbibliothek, MS 1093/1694, fol. 197r

AS	DEVNX	DECIANS	DOBANS	BISSE	SEPTVNI	SEMIS	QUINCVNI	TRIENS	DOBANS	SEXTANS	SECTNCIA	VNCIA	SEVNCH	DVELLA	SCILCVS	SEXTVLA	DRAGMA	IBIDIBITL	SCRIPVDS	OBOLVS	SEPTATE	CALCVS	SILIOVA
↗	SSS	SSS	SS	SS	S	S	SS	SS	S	S	⋮	+	⋮	UU	⊃	U	*	ψ	SS	+	⋮	Σ	~
XII	XI	X	VIII	VIII	VII	VI	V	III	III	II		XXIII	XII	VIII	VI	III	III	II	VIII	III	II	PVIII	
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	SS	PII	PIII	PIII	PVI	PVIII	PXI	VIII	PIII	PIII	PIII	PVIII
CM̄	XM̄	MM̄	CM̄	XM̄	M̄	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
			SIPOS	CELENTIS	TEMENIAS	ZENIS	CALCTIS	QVIMAS	ARBAS	ORMIS	ANDRAS	IGIN											
			o	?	o	^	⊃	4	⌘	⌘	⊃	I											
GERBERTVS L A T I O N V M E R O S A B A C I Q V E F I G V R A S																							
																						LINEA	
																						MI NV TI A R V M	

Obr. 5 – Vatikánský abakus [V] (11. století); překresleno podle Vatikan, Lat. 644, f. 77v–78r



Obr. 6 – Rouenský abakus [R] (11. století); překresleno podle Rouen, Bibliothèque municipale, MS 489, f. 68v–69r

<i>i</i>	<i>x</i>	<i>c</i>	\overline{i}	\overline{x}	\overline{c}
<i>ii</i>	<i>xx</i>	<i>cc</i>	\overline{ii}	\overline{xx}	\overline{cc}
<i>iii</i>	<i>xx</i>	<i>ccc</i>	\overline{iii}	\overline{xxx}	\overline{ccc}
<i>iiii</i>	<i>xL</i>	<i>cccc</i>	\overline{iiii}	\overline{xL}	\overline{cccc}
<i>v</i>	<i>L</i>	<i>d</i>	\overline{v}	\overline{L}	\overline{d}
<i>vi</i>	<i>Lx</i>	<i>dc</i>	\overline{vi}	\overline{Lx}	\overline{dc}
<i>vii</i>	<i>Lxx</i>	<i>dcc</i>	\overline{vii}	\overline{Lxx}	\overline{dcc}
<i>viii</i>	<i>Lxxx</i>	<i>dccc</i>	\overline{viii}	\overline{Lxxx}	\overline{dccc}
<i>ix</i>	<i>xc</i>	<i>dcccc</i>	\overline{ix}	\overline{xc}	\overline{dcccc}

Obr. 9 – Tzv. Abbonis abacus; překresleno podle Oxford, St. John's College, MS 17, 35r

řády	česky	Bernelius	Heriger	abakus [E]	abakus [B]	abakus [P]	abakus [J]
10 ⁰	jednotky	I (S, M)	I	I (S)	I (M)	I (S)	I (S)
10 ¹	desítky	X (D)	X	X	X (D)	X (D)	X (D)
10 ²	stovky	C	C	C	C	C	C
10 ³	tisíce	Ī (M)	Ī (M)	Ī	Ī	Ī	M
10 ⁴	desítky tisíců	ḫ	ḫ	ḫ	ḫ	ḫ	ḫ
10 ⁵	stovky tisíců	ċ	ċ	ċ	ċ	ċ	ċ
10 ⁶	miliony	MĪ	MM (Ī M) X Ċ	Ī M X Ċ	MĪ X Ċ	MM	MĪ
10 ⁷	desítky milionů	X MĪ	X MM (X Ī M) C Ċ	X Ī M C Ċ	X MĪ C Ċ	X MM	X MĪ
10 ⁸	stovky milionů	C MĪ	C MM (C Ī M) Ī Ċ	C Ī M Ī Ċ	C MĪ M Ċ	C MM	C MĪ
10 ⁹	miliardy	MMĪ	Ī MM (M Ī M) X Ċ	M MM X Ċ	MMĪ X Ċ	Ī MM	MMĪ
10 ¹⁰	desítky miliard	X MMĪ	X MM (X Ī M) Ċ Ċ	X Ī M Ċ Ċ	X MMĪ Ċ Ċ	X MM	X MĪ
10 ¹¹	stovky miliard	C MMĪ	Ċ MM (Ċ Ī M) Ī M Ċ (M Ī Ċ)	C Ī M X Ċ Ċ	C MMĪ X Ċ Ċ	Ċ MM	Ċ MĪ
10 ¹²	biliony	MMMĪ	Ī MM (M Ī M) X Ī Ċ	Ī M Ī M CCC	MMMĪ C Ċ Ċ	MM MM	MĪ MĪ
10 ¹³	desítky bilionů	X MMMĪ	X Ī MM (X Ī M) Ċ Ī Ċ	X Ī M Ī M M Ċ Ċ	X MMĪ M Ċ Ċ	X MM MM	X MĪ MĪ
10 ¹⁴	stovky bilionů	C MMMĪ	C Ī MM (C Ī M Ī M), Ċ Ī M	C Ī M Ī M	C MMĪ X Ċ Ċ	C MM MM	C MĪ MĪ
10 ¹⁵	biliardy	MMMMĪ	M Ī MM (M Ī M MM)	M Ī M Ī M	MMMMĪ Ċ Ċ Ċ	Ī MM MM	M MĪ MĪ
10 ¹⁶	desítky biliard	X MMMMĪ	X Ī MM	X Ī M Ī M	X MMĪ X Ċ Ċ	X MM MM	X MĪ MĪ
10 ¹⁷	stovky biliard	C MMMMĪ	Ċ Ī MM	Ċ Ī M Ī M	C MMĪ Ċ Ċ Ċ	Ċ MM MM	Ċ MĪ MĪ
10 ¹⁸	triliony	MMMMMĪ	MM Ī MM (Ī Ī MM)	Ī M Ī M Ī M	MMMMMĪ M Ċ Ċ Ċ	MM MM MM	MMĪ MMĪ
10 ¹⁹	desítky trilionů	X MMMMMĪ	X MM Ī MM	X Ī M Ī M Ī M	X MMĪ X Ċ Ċ Ċ	X MM MM MM	X MMĪ MMĪ
10 ²⁰	stovky trilionů	C MMMMMĪ	C MM Ī MM (C Ī Ī MM)	C Ī M Ī M Ī M	C MMĪ Ċ Ċ Ċ Ċ	C MM MM MM	C MMĪ MMĪ
10 ²¹	triliardy	MMMMMMĪ	Ī MM Ī MM	M Ī M Ī M Ī M	MMMMMMĪ X Ċ Ċ Ċ Ċ	Ī MM MM MM	M MMĪ MMĪ
10 ²²	desítky triliard	X MMMMMMĪ	X MM Ī MM	X Ī M Ī M Ī M	X MMĪ C Ċ Ċ Ċ Ċ	X MM MM MM	X MMĪ MMĪ
10 ²³	stovky triliard	C MMMMMMĪ	Ċ MM Ī MM	C Ī M Ī M Ī M	C MMĪ M Ċ Ċ Ċ Ċ	C MM MM MM	Ċ MMĪ MMĪ
10 ²⁴	kvadriliony	MMMMMMMĪ	Ī MM Ī MM	Ī M Ī M Ī M Ī M	MMMMMMMĪ X Ċ Ċ Ċ Ċ	MM MM MM MM	MM Ī MM Ī
10 ²⁵	desítky kvadrilionů	X MMMMMMĪ	X Ī MM Ī MM	X Ī M Ī M Ī M Ī M	X MMĪ Ċ Ċ Ċ Ċ Ċ	X MM MM MM MM	X MM Ī MM Ī
10 ²⁶	stovky kvadrilionů	C MMMMMMĪ	C Ī MM Ī MM	C Ī M Ī M Ī M Ī M	C MMĪ X Ċ Ċ Ċ Ċ Ċ	C MM MM MM MM	C MM Ī MM Ī

Tab. 2 – Značení sloupců na abaku

	<i>as</i>	<i>uncia</i>	<i>scripulus</i>	<i>calcus</i>
<i>as</i>	1	12	288	2304
<i>deunx</i>	11/12	11	264	2112
<i>dextans</i>	5/6	10	240	1920
<i>dodrans</i>	3/4	9	216	1728
<i>bisse</i>	2/3	8	192	1536
<i>septunx</i>	7/12	7	168	1344
<i>semis</i>	1/2	6	144	1152
<i>quinqux</i>	5/12	5	120	960
<i>triens</i>	1/3	4	96	768
<i>quadrans</i>	1/4	3	72	576
<i>sextans</i>	1/6	2	48	384
<i>sexuncia</i>	1/8	3/2	36	288
<i>uncia</i>	1/12	1	24	192
<i>semiuncia</i>	1/24	1/2	12	96
<i>duella</i>	1/36	1/3	8	64
<i>sicilicus</i>	1/48	1/4	6	48
<i>dragma (sextula)</i>	1/72	1/6	4	32
<i>(h)emisescla (dimidia sextula)</i>	1/144	1/12	2	16
<i>tremissis</i>	1/216	1/18	3/2	12
<i>scripulus</i>	1/288	1/24	1	8
<i>obolus</i>	1/576	1/48	1/2	4
<i>bissiliqua</i>	1/864	1/72	1/3	8/3
<i>cerates</i>	1/1152	1/96	1/4	2
<i>siliqua</i>	1/1728	1/144	1/6	4/3
<i>calcus</i>	1/2304	1/192	1/8	1

Tab. 3 – Přehled zlomků podle nákrešů raně středověkých abaků